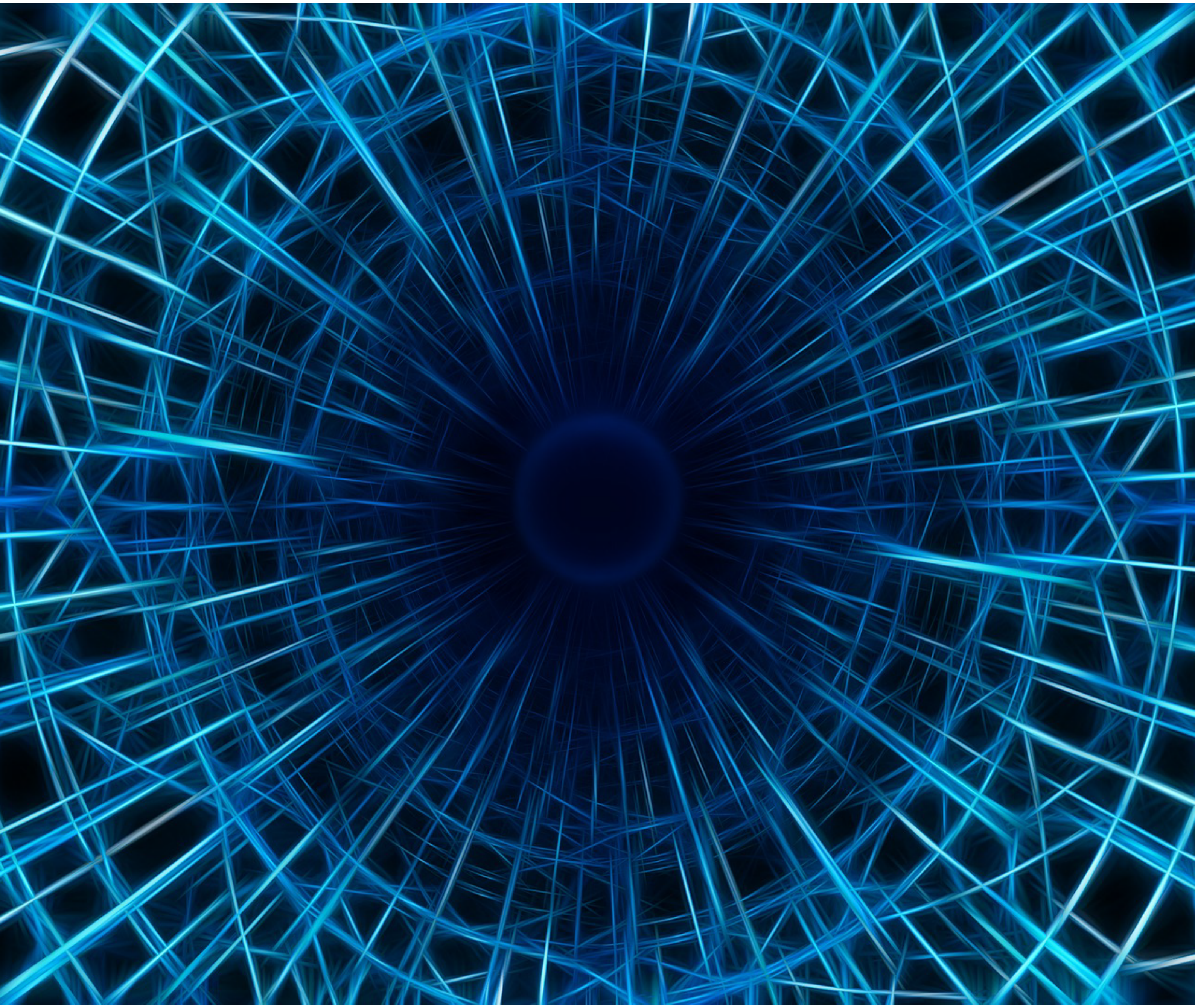
Física Mecánica para Ciencias e Ingenierías

David Vera / Cristian Solano / Pablo Viloria



libro digital

CUC
UNIVERSIDAD DE LA COSTA
1970
VIGILADA MINEDUCACIÓN

Física Mecánica para
Ciencias e Ingenierías

Vera, David
Física Mecánica para Ciencias e Ingenierías / David Vera, Cristian Solano, Pablo Viloria. 1ª. Edición. – Barranquilla: Universidad de la Costa, 2020
ISBN: 978-958-5172-00-5
176 paginas, gráficos
1. Física molecular 2. Física mecánica 3. Vectores 4. Vibraciones

530 V473

Física Mecánica para Ciencias e Ingenierías

David Vera / Cristian Solano / Pablo Viloria

2020

CUC
UNIVERSIDAD DE LA COSTA
1970
VIGILADA MINEDUCACIÓN

Física Mecánica para Ciencias e Ingenierías

David Vera
Crisitian Solano
Pablo Viloria

ISBN: 978-958-5172-00-5

Primera Edición
Corporación Universidad de la Costa, CUC

Diseño, diagramación y corrección de estilo
Editorial Universitaria de la Costa, S.A.S.
Teléfono: (575) 336 2222
educosta@cuc.edu.co

Lauren J. Castro Bolaño
Directora
Editorial Universitaria de la Costa S.A.S.

Fotografia portada: Pixabay

Hecho el depósito que exige la ley

Dedicatoria

A nuestras familias que nos han apoyado en cada proyecto de vida y sacrifican su tiempo para que nosotros podamos sacar adelantes estos proyectos y nos animan a seguir creciendo cada día como personas.

A nuestros estudiantes que nos brindan su conocimiento para trabajar con base en esto y seguir amando nuestra profesión cada día, ya que nos motivan a enseñar lo mejor en cada clase y nos reconocen como sus docentes.

Agradecimientos

A la Universidad de la Costa por todo el apoyo que nos ha dado durante todos los años que nos permite compartir la experiencia de enseñar cada día en las aulas.

Al departamento de Ciencias Naturales y Exactas, el cual ha facilitado las herramientas y ha direccionado los procesos de este proyecto para poder realizar un texto con todas las cualidades requeridas.

A la Editorial Educosta por darnos todo el apoyo y orientación en este proyecto, con paciencia y esfuerzo para hacer realidad esta publicación.

Prólogo

El propósito de este libro es fortalecer los conocimientos conceptuales de Física Mecánica a través de ejemplos y ejercicios de aplicaciones teniendo en cuenta un enfoque práctico y el desarrollo de elementos de competencias, fortaleciéndolas por medio de aplicaciones tipo *Saber Pro*. Cabe destacar la importancia de los conocimientos del curso, el cual tiene mucha aplicación a la ingeniería, por contribuir a generar una de las bases fundamentales de las demás temáticas de las Ingenierías. Es por estas razones que, el estudiante de hoy en día debe adquirir todas las herramientas que le sean de utilidad en sus proyectos y labores futuras.

En este libro se tratan temas fundamentales de la Física Mecánica, desde Cinemática hasta Conservación del Momento Angular, cada tema es explicado con los conceptos asociados, ilustrados con ejemplos y desarrollado por parte de los estudiantes, como parte del trabajo independiente.

Finalmente, se reconoce el esfuerzo realizado por los autores en la dedicación del texto. Así como el agradecimiento al equipo editorial por sus contribuciones y apoyo. Esperamos que este libro sea una herramienta de trabajo implementado por los docentes del departamento de Ciencias Naturales y Exactas en los procesos de enseñanza y una guía para los estudiantes en su proceso de aprendizaje.

Contenido

Índice de Figuras

Capítulo 1

Capítulo 2

Capítulo 3

Capítulo 4

Capítulo 5

Capítulo 6

Índice de Tablas

Introducción

Desde el principio de los tiempos los filósofos se han preocupado por encontrar el origen de las cosas que nos rodean y las causas posibles de estas, la Física se ha preocupado por el movimiento de los cuerpos y las causas que generan este, desde lo macroscópico hasta lo microscópico. La Física Mecánica clásica se encarga del movimiento de partículas y cuerpos de gran tamaño, a los cuales es aplicable las leyes del movimiento de Newton entre otras.

En este libro se presenta el contenido tradicional de un curso de Física Mecánica, incluyendo desde los conceptos relevantes para afrontar el curso hasta la Dinámica de Cuerpos Rígidos, pasando por la Cinemática, Dinámica, y principios de Conservación de la Energía, Momento Lineal y Angular.

Cada capítulo cuenta con ejemplos desarrollados para el fácil entendimiento del lector, a quienes se les transmiten los conceptos de manera clara y manejando un lenguaje entendible a cualquier lector; cuenta también con preguntas de reflexión que suponen la investigación más a fondo del lector para la resolución de dudas. Así como, la proposición de ejercicios que comprenden posibles resultados, los cuales puede consultar en la parte de atrás del libro.

Presentación

El presente texto está orientado al fortalecimiento de los procesos de aprendizaje y enseñanza en cada uno de los entes participantes, docentes y estudiantes, la generación de este material bibliográfico de autoría de docentes con la trayectoria necesaria en la Universidad de la Costa, orienta a los demás docentes a trabajar en función de las estrategias pedagógicas implementadas en la Universidad desde hace poco y fortalece la distribución de los tiempos requeridos para el desarrollo de la asignatura, optimizando estos.

Orienta a los estudiantes al manejo de las temáticas del curso, dando una guía de estudio preparada para las futuras clases; esto permitirá a los estudiantes prepararse mejor para la asignatura en cada corte académico. También, se busca reducir la deserción estudiantil por falta de bajo rendimiento, ya que el material estará disponible para todos en las bases de datos de la Universidad y la Biblioteca.

Capítulo 1

Herramientas Matemáticas y Vectores

En este capítulo se hará un repaso de los conceptos básicos desde la conversión de unidades hasta las operaciones con vectores, esta introducción de conocimientos se realiza para reforzar las bases del conocimiento necesarios para afrontar el curso con buen desempeño.

I. Sistema Internacional (SI) de Unidades

El Sistema Internacional de Unidades abreviado con frecuencia SI (System International) es el sistema estándar utilizado para el trabajo realizado por la comunidad científica en todo el mundo, en la Tabla 1 se muestra las unidades fundamentales de este sistema de unidades.

Tabla 1.1.
Magnitudes fundamentales SI.

Unidad	Abreviatura	Símbolo
Metro	m	longitud
Kilogramo	kg	masa
Segundo	s	tiempo
Apere	A	corriente
Kelvin	K	temperatura
Mol	mol	cantidad de sustancia
Candela	cd	intensidad luminosa

La importancia de este sistema de unidades radica en utilizarlas para una misma situación problema, esto indica que si en cierta situación contamos con magnitudes físicas por ejemplo en kilómetros como unidad de longitud y horas como unidad de tiempo debemos realizar una conversión de unidades para poder llevarlas a metros y segundos y así utilizar el SI, para ello introducimos los conceptos de conversión de unidades y la manera como se deben realizar estos cálculos [1].

Tabla 1.2.
Prefijos del Sistema Internacional

Factor	Prefijo	Símbolo	Factor	Prefijo	Símbolo
10^{1}	deca	da	10^{-1}	deci	d
10^{2}	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^{3}	kilo	k	10^{-3}	mili	m
10^{6}	mega	M	10^{-6}	micro	µ
10^{9}	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{21}	zeta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	yota	Y	10^{-24}	yocto	y

Las demás unidades físicas pueden ser deducidas a partir de las magnitudes fundamentales, por ejemplo, la unidad de volumen es m3, la unidad de velocidad son m/s entre otras. Por otro lado, como se mencionó anteriormente, existen cantidades muy grandes y cantidades muy pequeñas que pueden ser representadas cuantitativamente a través de potencias de 10, para estandarizar algunas de estas potencias se establecieron unos prefijos, estos los podemos presentar como muestra la Tabla 2.

Estos prefijos son muy útiles a la hora de representar las grandes o bajas cantidades, por ejemplo, en el campo de la tecnología actualmente las memorias se encuentran en el orden de los 1012 Bytes, es decir, TB (Tera Bytes) lo que equivale a un número muy alto para ser escrito completamente.

II. Notación Científica

La comunidad científica ha establecido reglas en las cuales pueden comunicarse entre ellos de manera cuantitativa. En primera instancia resulta fácil escribir números, en física resulta muy tedioso manejar números muy grandes y pequeños.

Por ejemplo, la masa de la tierra es 5972200000000000000000000 kg, trabajar con este número resulta fastidioso, por lo que requerimos de una representación cuantitativa que me ilustre esta cantidad.

La forma como representamos estas grandes cantidades o pequeñas cantidades son a través de potencias de 10, por ejemplo, $a \times 10^{n}$ con a como mantisa y n número entero, el exponente n represente el número de comas corridas hacia la izquierda o hacia la derecha, la dirección de la corrida de la coma lo indica el signo del exponente, si el exponente es negativo, la coma debe correrse hacia la izquierda y si el exponente es positivo debe de correrse hacia la derecha. Por ejemplo, la masa de la tierra puede ser expresada como 5.9722 × 1024 kg, observamos en esta expresión que el número 24 representa las comas corridas hacia la derecha, en el caso que en las cifras no existan más números los espacios deben estar ocupados por ceros (0), por ejemplo, la masa del grano de una arena de la tierra es del orden de 6.6×10^{-4} g, es decir, de 0.00066 g, en este caso, se observa que las comas corren hacia la izquierda dado que el exponente es negativo, los espacios que se encuentran antes del 6 (primero número entero) se rellenan con ceros (0). Otra forma de utilizar la notación científica es expresando un decimal o número entero en potencias de 10, consideremos la cifra 3452.76, la forma como se corren las comas y la manera como aparece la potencia de 10 se ilustra a continuación.

$$3452.76 = \overset{\text{cifras}}{3.45276} \times \overset{\text{potencia de 10}}{10^{3}}$$

Se evidencian tres comas corridas hacia la izquierda que representarían en la notición científica, una potencia de 10 con exponente 3 positivo.

III. Conversión de Unidades

Quizás en algún momento ha observado alguna señalización de transito donde indique la velocidad mínima permitida, en muchas ocasiones las unidades están en kilómetros y otras en millas, en estas mismas vías observamos señalizaciones donde indican el valor máximo peso de los camiones que transitan la vía, normalmente estas cantidades las expresan en toneladas, por estas y muchas más situaciones es necesario pasar las magnitudes de unas unidades a otras, este proceso es lo que llamamos conversión de unidades [1]. Las conversiones las utilizamos cuando queremos tratar las cantidades en un mismo sistema de unidades, por ejemplo, todas en el SI. El factor de conversión (relación conocida entre dos cantidades que se expresan en diferentes unidades) se ordena de modo que se cancelen las unidades que se requieren convertir y que quede la unidad que se busca, es decir (ecuación 1.1):

$$\boldsymbol{Unidad\ a\ convenir} \times \frac{\boldsymbol{Unidad\ buscada}}{\boldsymbol{Unidad\ a\ convenir}} = \boldsymbol{Unidad\ buscada} \quad (1.1)$$

Ejemplo 1.1

Para canchas de futbol en las que se juegan torneos internacionales de grandes equipos, las medidas máximas son de 75 $m \times 110\ m$, es decir, unos 8250 m^2 debe tener el terreno para construir la cancha de futbol. ¿Cuántos kilometros cuadrados medira esta cancha?

- *Solución*

La conversion se puede hacer de dos formas, una primero convirtiendo cada facto de metros a kilometros y luego multiplicarlos o tomar el valor multiplicado y convertir de metros cuadrados a kilometros cuadrados. Realizaremos las dos formas de hacerlo como modo de ilustración utilizando la ecuación 1.1.

Metodo 1.

$$\left.\begin{array}{r} 75\ m \times \dfrac{1\ km}{1000\ m} = 0.075\ km \\[2em] 110\ m \times \dfrac{1\ km}{1000\ m} = 0.110\ km \end{array}\right\} \text{Luego}, 0.075\ km \times 0.110\ km = 0.00825\ km$$

Metodo 2.

$$8250\ m^2 \times \frac{1\ km}{(1000\ m)^2} = \frac{8250\ m^2}{(10^3\ m)^2}\ km = \frac{8250\ m^2}{10^6\ \ m^2}\ km = 0.00825\ km$$

IV. Análisis Dimensional

En física, cuando se habla de *dimensión* se hace referencia a la naturaleza de una cantidad, por ejemplos, si un cuerpo tiene una medida en onzas, gramos o kilogramos, en cualquiera de las tres unidades que tenga siempre será una medida de *masa*. Lo mismo sucede cuando medimos una distancia en metros, kilómetros o millas, en todos los casos se dice que es una medida de longitud.

La simbología que normalmente se utiliza para indicar las dimensiones de longitud, masa y tiempo son L, M y T respectivamente. Estas dimensiones suelen expresarse entre corchetes [] para indicar que corresponde a una dimensión de alguna magnitud física. La Tabla 3 muestra algunas dimensiones y sus unidades utilizadas con más frecuencia.

Tabla 1.3.
Dimensiones y sus unidades

Cantidad	**Longitud**	**Área**	**Volumen**	**Rapidez**	**Aceleración**
Dimensiones	L	L^2	L^3	L/T	L/T^2
Unidades del SI	m	m^2	m^3	m/s	m/s^2

El propósito primordial de utilizar el análisis dimensional se basa en la verificación de los fundamentos físicos de una ecuación, es decir, de comprobar si una ecuación realmente tiene sentido físico. Por ejemplo, podemos analizar la expresión $v = at$, con v rapidez, a aceleración y t tiempo. Comprobando si la ecuación tiene fundamento físico obtenemos (ecuación 1.2):

$$\left[\frac{L}{T}\right] = \left[\frac{L}{T^2}\right] \cdot [T] = \left[\frac{L}{T}\right] \qquad (1.2)$$

Nótese que las dimensiones de tiempo se eliminan. Además, se observa que las dimensiones de la rapidez en el lado derecho igual al lado izquierdo, lo que muestra que es una ecuación dimensionalmente correcta.

Ejemplo 1.2

Consideremos el movimiento de un vehículo que se mueve en línea recta con aceleración constante, la ecuación que representa la velocidad este movimiento es $v = v_0 + at$, con v velocidad en cualquier instante, v_0 velocidad inicial, a aceleración y t tiempo transcurrido. ¿esta ecuación es dimensionalmente correcta?

- *Solución*

De acuerdo con la Tabla 3, representamos las magnitudes como:

$$\left[\frac{L}{T}\right] = \left[\frac{L}{T}\right] + \left[\frac{L}{T^2}\right][T]$$

$$\left[\frac{L}{T}\right] = \left[\frac{L}{T}\right] + \left[\frac{L}{T}\right]$$

Por lo que podemos observar que tienen las mismas dimensiones, por tanto, la correspondiente ecuación $v = v_0 + at$ es dimensionalmente correcta.

V. Sistemas de Coordenadas

El sistema de coordenadas es el conjunto de valores que permite identificar de manera certera la ubicación de un punto en el espacio euclidiano. El origen del sistema de coordenadas es la referencia en el marco de un sistema de coordenadas. En este libro trabajaremos con dos sistemas de coordenadas, uno es el sistema de coordenadas cartesianas (también llamadas rectangulares) y el otro sistema de coordenadas polares, en ultimas se utilizará la relación entre estos dos sistemas de coordenadas [2].

A. *Sistema de Coordenadas Rectangulares*

El sistema de coordenadas rectangulares está constituido por dos rectas (llamadas ejes) perpendiculares entre sí, que se interceptan en el origen del sistema de coordenadas. El eje horizontal también es llamado abscisa y el eje vertical llamado ordenadas, tal como se muestra en la Fig. 1.1. Estos ejes dividen el plano en cuatro regiones que se suele llamar cuadrante, por lo que en un plano cartesiano bidimensional existen cuatro cuadrantes.

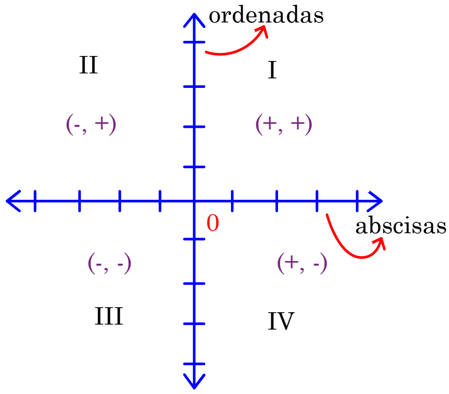


Fig. 1.1. Sistema de coordenadas.

En el plano cada punto es localizado mediante dos números, uno que corresponde al eje horizontal y el otro al eje vertical, este punto se escribe en paréntesis y separados por una coma entre las coordenadas (x, y).

B. *Sistema de Coordenadas Polares*

El sistema de coordenadas polares es otra forma de representar un punto en el espacio. Si consideramos un vector de magnitud r que parte desde el origen del sistema de coordenadas con ángulo θ, entonces, podríamos representar este punto en coordenadas polares como (r, θ).

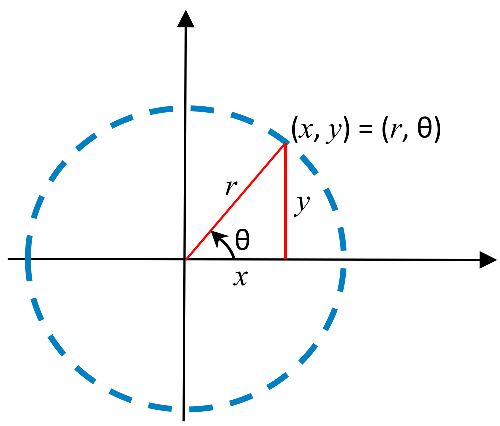


Fig. 1.2. Sistemas de coordenadas polares.

Por identidad trigonométrica de acuerdo con el triángulo rectángulo formado en la Fig. 1.2, tenemos (ecuación 1.3) (ecuación 1.4) (ecuación 1.5):

$$\text{sen } \theta = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{Hipotenusa}} = \frac{y}{r} \tag{1.3}$$

$$\cos \theta = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{Hipotenusa}} = \frac{x}{r} \tag{1.4}$$

$$\tan \theta = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{cateto adyacente}} = \frac{y}{x} \tag{1.5}$$

Por lo que:

$$y = r \,\text{sen}\, \theta \tag{1.6}$$

$$x = r \cos \theta \tag{1.7}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \tag{1.8}$$

Ejemplo 1.3

Una persona está situada en el punto O como muestra la Fig. , en ella visualiza la parte superior de un edificio con un ángulo de elevación de 45°, si la persona se acerca 20 m el ángulo de elevación es de 60°, ¿Cuál debe ser la altura del edificio?

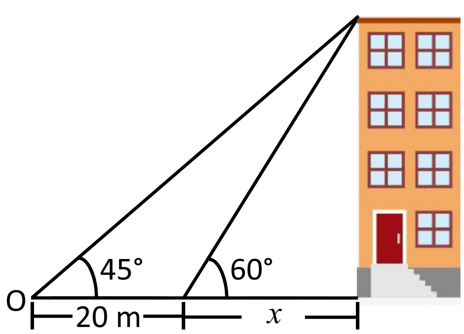


Fig. 1.3. Vista desde el punto O a la azotea del edificio.

• *Solución*

Podemos utilizar las funciones trigonométricas para triángulos rectángulos para los dos triángulos, en este caso la altura del edificio.

(h) es la misma para ambos triángulos, por lo que podemos relacionar los dos triángulos.

Para el triángulo de 45° utilizamos la función tangente que relaciona el cateto opuesto con el adyacente.

$$\tan 45° = \frac{h}{20 + x}$$

Lo mismo ocurre para el triángulo de 60°, utilizamos la función tangente.

$$\tan 60° = \frac{h}{x}$$

Despejando h de las dos ecuaciones e igualando tendremos:

$$h = (20 + x)\tan 45° \qquad \text{y} \qquad h = x \tan 60°$$

$$(20 + x)\tan 45° = x \tan 60°$$

$$20 \tan 45° = x(\tan 60° + \tan 45°)$$

Despejando x y calculando obtenemos:

$$x = \frac{20 \tan 45°}{\tan 60° + \tan 45°} = 7.32\ m$$

Luego, $h = x \tan 60° = 7.32\ m \tan 60° \Rightarrow h = 12 - 67\ m$. Por tanto, la altura del edificio es de 12.67 m.

VI. Cifras Significativas

El uso de cifras significativas es muy útil a la hora de querer establecer una precisión en una medida, podemos decir que las cifras significativas representan el número de dígitos desconocidos de manera confiable en una medida. Se presentan algunas reglas con ejemplos de los criterios de cifras significativas [1].

- En los números enteros y decimales se tienen en cuenta como cifras significativas, por ejemplo 4.23 contiene 3 cifras significativas, 3.5 tiene dos cifras significativas.
- Los ceros a la izquierda del primer número no nulo no se consideran como cifras significativas. Por ejemplo 0.00035 solo contiene 2 cifras significativas igual que 3.5.
- Los ceros entre cifras significativas y después del último número no nulo si son cifras significativas, por ejemplo, 604 tiene 3 cifras significativas, 2.530 tiene 4 cifras significativas.
- En el caso de una división, el resultado no puede contener más cifras significativas que el mínimo de cifras significativas utilizada en la operación, por ejemplo, la división de 2.34/4.5631 se escribe 0.513, 8.4268/2.643 es igual a 3.188.
- En la suma se deben sumar los términos colocando como resultados el mínimo número de cifras significativas, por ejemplo, 2.34 + 4.5631 igual a 6.90.

VII. Mediciones Directas e Indirectas y Cálculo de Errores

Antes de definir el concepto de mediciones directas e indirectas es importante conocer el significado de medir, cuando hablamos de medir comúnmente lo asociamos a una escala valorativa, pues bien, para realizar una medida no necesariamente debemos tener un instrumento calibrado, con el hecho de utilizar un objeto que nos sirva de referencia y comparemos este objeto con la magnitud desconocida estamos realizando una medida, entonces podemos definir la palabra medir como comparar una magnitud desconocida con una unidad patrón (magnitud conocida). Al realizar las comparaciones podemos obtener dos tipos de medidas, por ejemplo, cuando queremos conocer la masa de un cuerpo o cuando queremos medir la densidad de una sustancia, estos dos tipos de medidas se llaman comúnmente como medidas directas e indirectas respectivamente.

- *Mediciones directas*: Las mediciones directas son el resultado de hacer una comparación de una magnitud desconocida con una unidad patrón, por ejemplo, la medida de la masa de un cuerpo, el tiempo y la longitud son algunas de este tipo de medidas.
- *Mediciones indirectas*: Las mediciones indirectas son las que se obtienes a través de dos o más medidas a través de diferentes operaciones aritméticas, por ejemplo, el volumen de una esfera es determinado a través de una ecuación y la medida directa del diámetro.

A. Cálculos de errores en Medidas Directas

En las medidas directas como se mencionó anteriormente son aquellas magnitudes desconocidas que son tomadas directamente del instrumento de medición. En toda medición existe una desconfianza en la medida no importando cuantas veces se tomen las medidas esta medida siempre tendrá un grado de suspicacia a la hora de confirmar una medida. En tal caso, lo que podemos hacer es acercarnos lo más posible al valor real V_R, expresándolo como (ecuación 1.9):

$$\boldsymbol{V_R = V_o \pm \Delta V} \tag{1.9}$$

Siendo V_0 el valor promedio o valor observado y ΔV la incertidumbre en la medida, es decir, el grado de desconfianza. Esta ecuación es la manera indicada de como el lector debe expresar sus mediciones.

Normalmente cuando se realiza una medida se atribuye como error de escala a una medida correspondiente a la división más pequeña del instrumento, dividido entre 2. Por ejemplo, si el lector mide con una cinta métrica graduada en mm, entonces el error que se atribuye es de 0.5 mm (0.05 cm). De esta manera si usted mide una longitud de 11.00 cm el resultado de la medición correspondería a $L = (10.00 \pm\ 0.05)\ cm$, lo que nos indica de que su verdadero valor se encuentra en el intervalo.

$$10.05\ cm < L < 11.05\ cm$$

Una forma más pertinente de expresar una medida es determinando los valores extremos donde se observa la magnitud a medir.

Consideremos la lectura de la medida en la figura que sigue, se observa que la medida se encuentra entre $L_1 = 2.70\ cm$ y $L_2 = 2.80\ cm$, con estos valores extremos podemos asignar un valor central o promedio en el intervalo dado y el error de la medida.

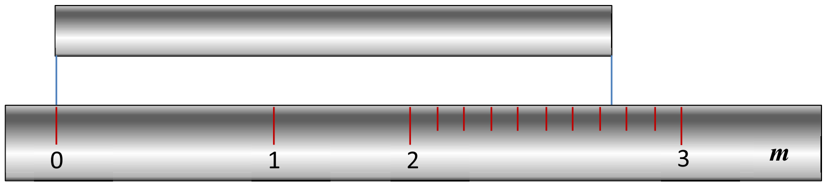


Fig. 1.4. Medida obtenida de un calibrador o pie de rey.

$$\bar{L} = \frac{L_2 + L_1}{2} \tag{1.10}$$

Por tanto, al aplicar la ecuación 1.10 obtenemos los valores extremos de la medida:

$$\bar{L} = \frac{2.80 + 2.70}{2} = 2.7\underline{5}\ cm$$

En donde 5 es la cifra incierta en la medida. Por otra parte, podemos expresar la incertidumbre de la medición como:

$$\bar{L} = \frac{L_2 - L_1}{2} \tag{1.11}$$

Para esta misma medición tenemos que:

$$\bar{L} = \frac{2.80 - 2.70}{2} = 0.05\ cm$$

Que corresponde a la mitad de la división más pequeña. El resultado final de la medición se puede expresar como:

$$L = (2.75 \pm 0.05)\ cm$$

B. *Cálculos de errores en medidas indirectas*

Cuando se realizan mediciones indirectas. Como, por ejemplo, en área de un terreno para la construcción de una casa se deben medir el largo y ancho del terreno por separado, al hacer estas medidas obviamente se cometen errores lo que conlleva a tener un error en el área determinada. Esta es la razón de conocer cómo se propaga el error en una medición calculada indirectamente de acuerdo con una operación de dos mediciones o mediante una función de dos o más variables.

Se presenta un caso especial en el producto de dos o más variables con diferentes exponentes como por ejemplo $h = x^n y^m$, primero se obtiene el logaritmo de la expresión.

$$\boldsymbol{\log h = n \log x + m \log y} \tag{1.12}$$

Luego se realiza el diferencial o erros como:

$$\boldsymbol{\frac{\Delta h}{h_o} = n\frac{\Delta x}{x_o} + m\frac{\Delta y}{y_o}} \tag{1.13}$$

En el caso que los exponentes sean negativos, se toman los valores absolutos para poder obtener siempre una suma de incertidumbres. Por otro lado, el error porcentual en la medida ya sean directas o indirectas se puede determinar a través de la relación (ecuación 1.14):

$$\%\mathcal{E}_{\boldsymbol{r}} = \left(\frac{\boldsymbol{\Delta h}}{\boldsymbol{h_o}} \times \boldsymbol{100}\right)\% \tag{1.14}$$

Retomando el caso anterior, podemos determinar el error porcentual en la medida con ayuda de la anterior ecuación:

$$\%E_R = \left(\frac{0.05}{2.75} \times 100\right)\% = (0.018 \times 100)\% = 1.8\,\% \approx 2\,\%$$

Ejemplo 1.4

El diámetro de un cilindro es medido con un vernier de precisión ± 0.05 *cm* $D = (2.215 \pm 0.025)$ *cm*, la altura es medida con el mismo instrumento dando una lectura de $h = (3.270 \pm 0.025)cm$, ¿Cuál es el valor central ± incertidumbre del volumen del cilindro?

- *Solución*

El volumen de un cilindro es $V = \pi r^2 h$, escribimos este volumen en términos del diámetro como:

$$V = \pi r^2 h \;\Rightarrow \qquad V = \frac{\pi}{4} D^2 h$$

Luego, el valor promedio es $V_0 = \pi/4 D^2{}_0 h_0$, Reemplazando los valores promedios del diámetro y altura $V_0 = \pi/4 \cdot (2.215)^2 \cdot 3.270\ \text{cm}^3 \Rightarrow V_0 = 12.60\ \text{cm}^3$, luego aplicando logaritmo natural se determina la incertidumbre de la medida como:

$$\ln V = \ln\frac{\pi}{4} + \log D^2 + \ln h$$

$$\ln V = \ln\frac{\pi}{4} + 2\ln D + \ln h$$

Aplicando el diferencial a la expresión anterior, la ecuación se reduce como:

$$\frac{\Delta V}{V_o} = 2\frac{\Delta D}{D_o} + \frac{\Delta h}{h_o} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta V = V_o\left(2\frac{\Delta D}{D_o} + \frac{\Delta h}{h_o}\right)$$

Reemplazando los valores conocidos en esta última expresión:

$$\Delta V = 12.60\ cm^3 \times \left(2\frac{0.025}{2.215} + \frac{0.025}{3.270}\right)$$

$$\Delta V = 0.38\ cm^3$$

Luego se puede expresar el volumen real como $V = (12.60 \pm 0.38)\ \mathrm{cm}^3$.

VIII. Análisis de Gráficas

En física es muy útil conocer de cómo es el comportamiento de diferentes gráficas, tales como una dependencia lineal, cuadrática, y exponencial entre muchas más, el comportamiento gráfico de estas funciones nos ayuda a comprender las relaciones entre una y otras magnitudes físicas que se estudiaran a lo largo del estudio de la física.

A. *Función Lineal*

La dependencia lineal entre variables es una herramienta fundamental para el estudio de la física, a través de estas podemos modelar la dependencia entre magnitudes físicas de diferentes fenómenos naturales. En esta parte analizaremos esta dependencia y las diferentes interpretaciones que podemos hacer.

Una dependencia lineal consta de una variable independiente (x) y dependiente (y) acompañada de una constante de proporcionalidad llamada pendiente (m) y el intercepto (b), esta relación se puede representar gráfica y matemáticamente como en la Fig. 1.5.

La ecuación que representa esa relación x contra y es la 1.15:

$$\boldsymbol{y = mx + b} \tag{1.15}$$

La Fig. 1.5 muestra una línea ascendente con $m > 0$, y la Fig. 1.4 una línea descendente con $m < 0$, es decir, que medida que aumente la variable independiente, disminuye la variable dependiente.

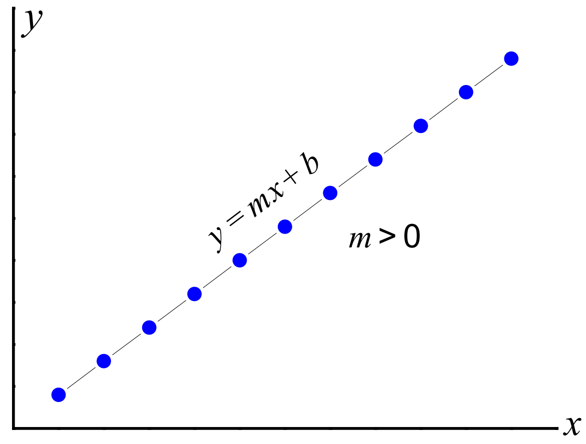


Fig. 1.5. Dependencia lineal con pendiente positiva.

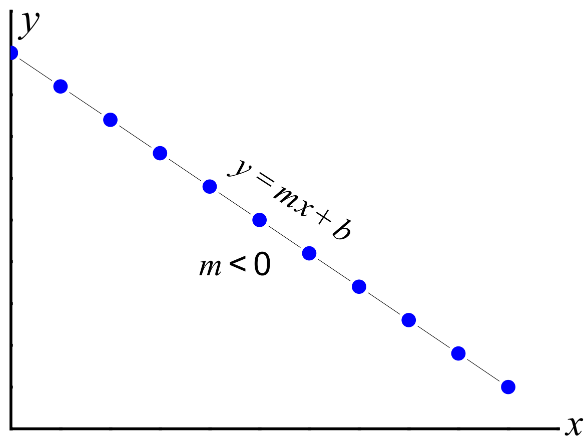


Fig. 1.6. Dependencia lineal con pendiente negativa.

Una manera de determinar la pendiente de la ecuación anterior es a través de la expresión,

$$\boldsymbol{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} \tag{1.16}$$

Es decir, podemos tomar dos puntos (x, y) cualesquiera de la recta para determinar el valor de la pendiente. En el caso del intercepto, se puede determinar tomando la coordenada (0, y), con $y = b$.

La aplicación más común es de esta relación lineal se da, en la relación entre posición y tiempo de un vehículo moviéndose en línea recta y con velocidad constante.

Por ejemplo, si tomamos ciertos datos de un vehículo que de desplaza en línea recta velocidad constante, tendríamos el comportamiento mostrado en la figura 1.5. En esta se observa una dependencia lineal con ecuación $x = 40t$.

Si comparamos esta ecuación con la ecuación lineal, se observa que la pendiente tiene una magnitud de 40 km/. Este valor tiene un significado físico para este caso, corresponde al valor de la velocidad promedio que lleva el vehículo durante todo su recorrido, por lo que $v = 40$ km/h.

Para comprobar tomemos dos puntos de la gráfica (1, 40) y (4, 160), utilizando la ecuación:

$$m = \frac{160 - 40}{4 - 1} km/h = \frac{120}{3} km/h = 40\ km/h$$

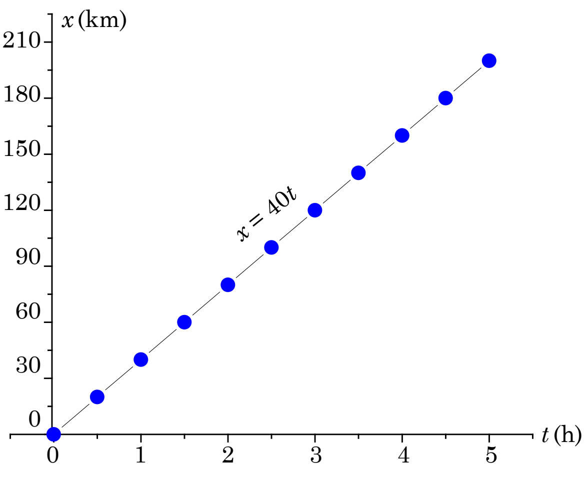


Fig. 1.7. Dependencia lineal de un móvil con velocidad constante.

Por lo que, la velocidad también es 40 km/h.

B. *Función del tipo A/x*

La función de tipo A/x con constante A, es una función muy utilizada en varios fenómenos de la física, la representación gráfica de este comportamiento se puede mostrar en la Fig. 1.8 en esta se ilustra que a medida que aumenta la variable independiente disminuye la variable independiente, una manera de encontrar la constante A es a través de la linealización de la curva, en este caso, se puede graficar y contra $1/x$, obteniendo un comportamiento lineal tal como el que se muestra en la Fig. 1.9.

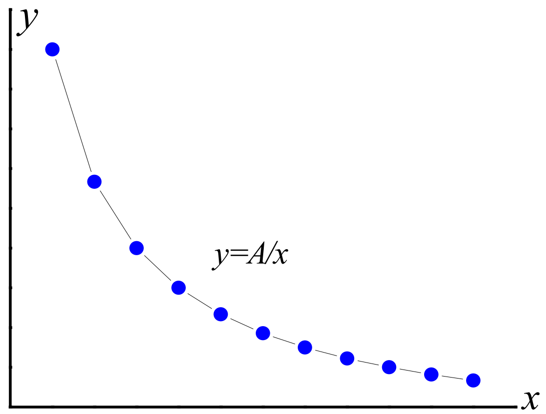


Fig. 1.8. Función del tipo A/x.

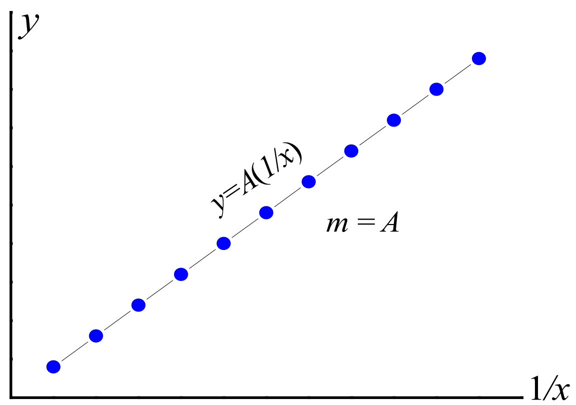


Fig. 1.9. Linealización de la función tipo A/x.

De la Fig. 1.9 se puede obtener de la dependencia lineal, el valor de la pendiente corresponde directamente al valor de la constante A.

Consideremos una medida de potencial eléctrico (voltaje) debida a una carga puntual q (carga del electrón 1.6×10^{-19}C), el cual se muestra en la Fig. 1.10.

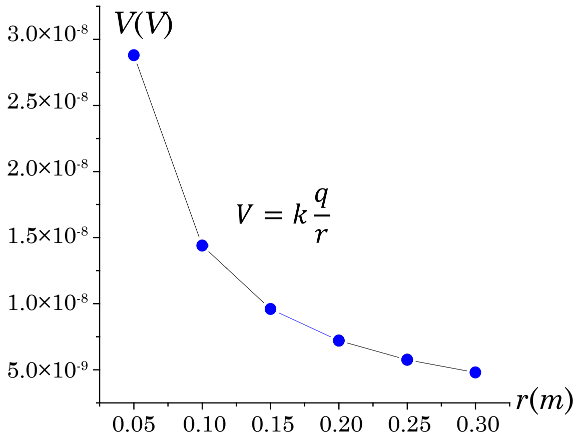


Fig. 1.10. Función Potencial kq/r.

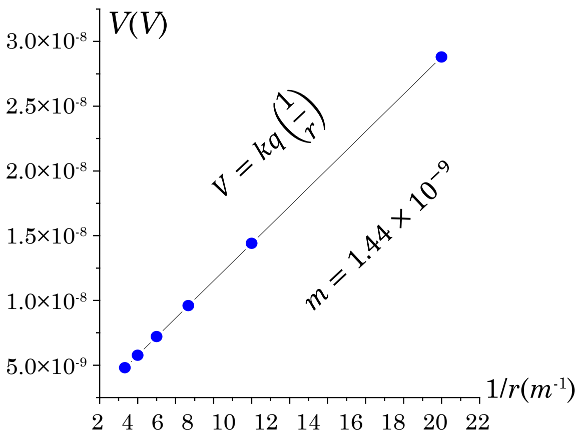


Fig. 1.11. Linealización de la función potencial kq/r.

La magnitud k representa la constante eléctrica la cual tiene un valor de 9.0×10^{9} Nm^2/C^2. De acuerdo con la figura 1.9 el valor de la pendiente debe corresponder con el producto de la constante y la carga eléctricas, es decir, $m = kq$, si deseamos conocer el valor de la constante k de la gráfica utilizamos el valor de la pendiente y despejamos k:

$$k = \frac{m}{q} = \frac{1.44 \times 10^{-9}}{1.60 \times 10^{-19}}\ \mathrm{Nm^2/C^2} \Rightarrow k = 9.00 \times 10^{9}\ \mathrm{Nm^2/C^2}$$

Lo que muestra que es muy útil realizar la linealización para encontrar las magnitudes físicas constantes en algunas situaciones de fenómenos físicos.

C. *Función cuadrática*

La función cuadrática es muy utilizada en física para representar el movimiento en línea recta de una partícula con velocidad variable en el tiempo, esta función tiene la forma $ax^2 + bx + c$, con a $\neq 0$. La Fig. 1.12 muestra una función cuadrática. El elemento a de la parábola nos indica el ancho de la curva, es decir, la longitud de separación entre la curva y el eje vertical, entre menos valor sea a más ancha será la curva hasta llegar a valores negativos donde se invierte la curva, por lo que, si $a > 0$ la curva abre hacia arriba y si $a < 0$ la curva abre hacia abajo.

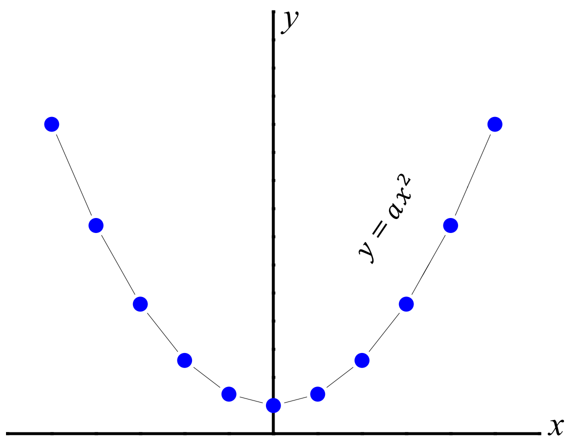


Fig. 1.12. Función cuadrática de la forma ax^2.

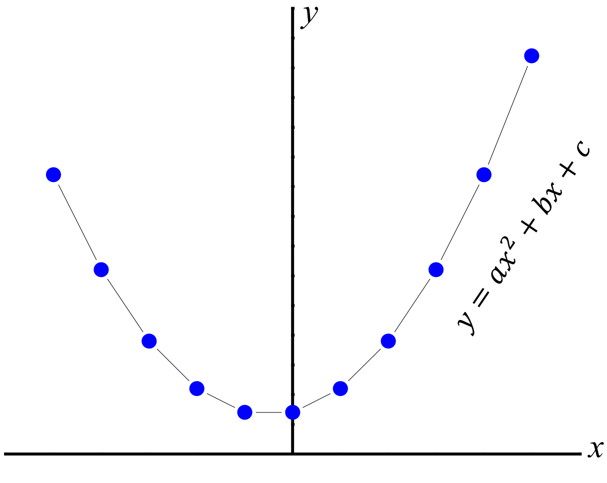


Fig. 1.13. Función cuadrática de la forma ax^2+bx+c.

El parámetro b representa el corrimiento horizontal y c el vértice de la curva, es decir, el punto donde se abre la curva.

Una aplicación común de esta función en el campo de la física es a través del movimiento rectilíneo con velocidad variable, donde el movimiento implica una aceleración constante en el movimiento, si tomáramos datos de posición con respecto al tiempo de un vehículo con estas características tendríamos un comportamiento grafico como en la Fig. 1.13.

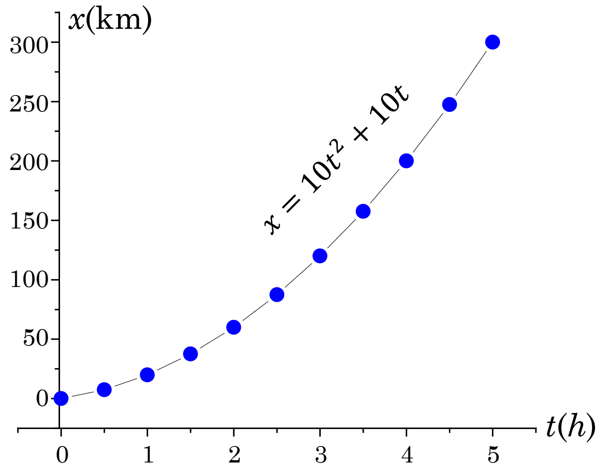


Fig. 1.14. Movimiento con velocidad variable.

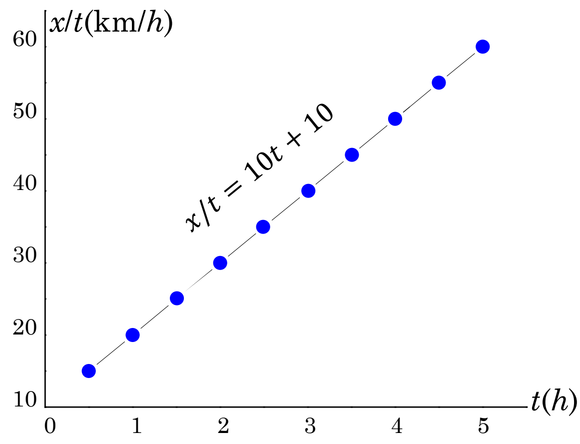


Fig. 1.15. Ajuste lineal del movimiento con velocidad variable.

El modelo matemático de este movimiento es $x = v_0t + 1/2at^2$, con v_0 velocidad inicial del movimiento, t el tiempo y a aceleración, en este caso, $x = 10t + 10t^2$, (Fig. 1.14) por lo que al linealizar la ecuación basta con dividir x/t, quedando la expresión $x/t = 10 + 10t$, por lo que podemos ilustrar el ajuste a través de la Fig. 1.15. En la Tabla 1.4 se muestran los valores ajustados.

TABLA 1.4.
Datos de movimiento con Velocidad Variable y Ajuste Lineal

t (h)	***x* (km)**	***x*/t (km/h)**
0	0	-
0.5	7.5	15
1.0	20	20
1.5	37.5	25
2.0	60	30
2.5	87.5	35
3.0	120	40
3.5	157.5	45
4.0	200	50
4.5	247.5	55
5.0	300	60

Al comparar la ecuación ajustada con la ecuación lineal se observa que la pendiente tiene un valor de 10, es decir, $m = 10$, por otro lado, comparando con la ecuación de movimiento se tiene que esta pendiente corresponde a $1/2a$, por lo que $m = 1/2a$, por lo tanto, el valor de la aceleración se puede determinar con $a = 20\ m$, en este caso, $a = 2(10)\ km/h^2 \Rightarrow a = 20\ km/h^2$.

IX. Vectores y Escalares

En física existen magnitudes que requiere algunas especificaciones para comprender por completo la cantidad, por ejemplo, la longitud, masa, tiempo y temperatura son ejemplo de cantidades escalares, estas se especifican únicamente por que posee una magnitud y su unidad. En muchos casos se requiere alguna información adicional, por ejemplo, la ubicación de un piloto de avión, la velocidad de un vehículo, la fuerza que se le aplica a un cuerpo, el desplazamiento que realiza una persona, para indicar cualquiera de estas magnitudes se requiere no solo la magnitud y su unidad, sino también su dirección, este grupo de magnitudes son llamadas vectoriales, en resumen podemos decir que una cantidad escalar se especifica únicamente por tener una magnitud y su unidad, mientras que un vector se especifica por tener una magnitud con su unidad y dirección [2].

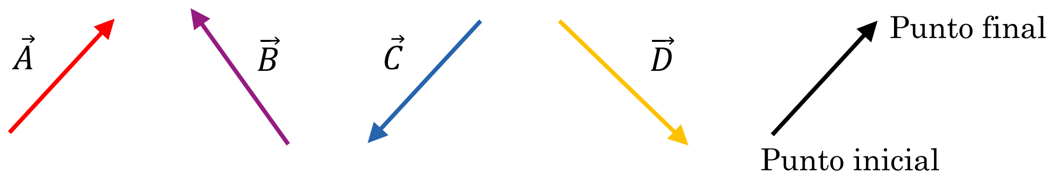


Fig. 1.16. Vectores.

Los vectores se representan en manuscrito con una letra en cualquiera de las tres representaciones como A, $\vec{A}$ o $\vec{a}$, la primera es una letra cursiva en negrita y las otras dos pueden ser una letra en mayúscula o minúscula con una flecha en la parte superior. Otra manera de observar un vector es a través de fechas en el espacio indicando la magnitud (longitud de la flecha) y dirección (Fig. 1.16).

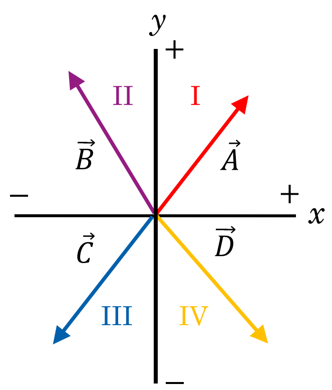


Fig. 1.17. Plano cartesiano.

Estos vectores se pueden representar en el plano cartesiano correspondiendo en cada uno de sus cuadrantes o ejes cardinales, desplazándolos sin cambiar ni su magnitud (longitud) ni dirección, colocado el punto inicial del vector en el origen del sistema de coordenadas. En el plano cartesiano se pueden observar cuatro cuadrantes (I, II, III y IV), en el primer cuadrante tanto el eje x como y son positivos, en el segundo cuadrante el eje x es negativo y eje y positivo, tercer cuadrante tanto el eje x como y son negativos y por último el cuarto cuadrante el eje x es positivo y eje y negativo (Fig. 1.17).

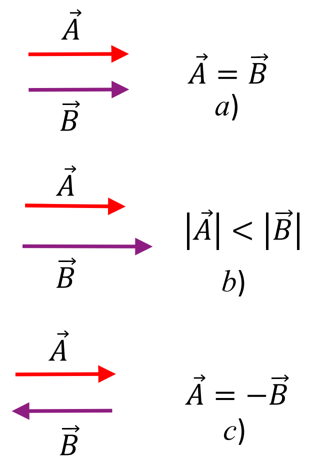


Fig. 1.18. Igualdad entre vectores.

Un vector puede ser nulo, negativo o positivo. Dos vectores son iguales si tienen igual magnitud y dirección (Fig. 1.18a), y una magnitud se puede representar como (Fig. 1.18b):

$$\textbf{Magnitud} = \boldsymbol{A} = |\vec{\boldsymbol{A}}| \tag{1.17}$$

Por otro lado, si un vector presenta mayor longitud que otro, indica que tiene una mayor magnitud (Fig. 1.18b). Dos vectores son iguales y opuestos si tienen igual magnitud, pero sentido contrario (Fig. 1.18c). Este también es llamado el inverso aditivo del vector.

A. *Suma de Vectores por el Método gráfico*

Supondremos que un vehículo se desplaza desde un semáforo hasta donde se topa con una carretera (vector $\vec{A}$), luego gira a la derecha y se desplaza a un centro de automóviles donde finalmente reposa (vector $\vec{B}$), el resultado de este desplazamiento seria el mismo que si la persona se dirige directamente desde el semáforo hasta el centro de automóviles. Gráficamente lo podemos ilustrar como se muestra en la Fig. 1.19. Vectorialmente podemos escribir el vector resultante $\vec{R}$ como en la ecuación 1.18.

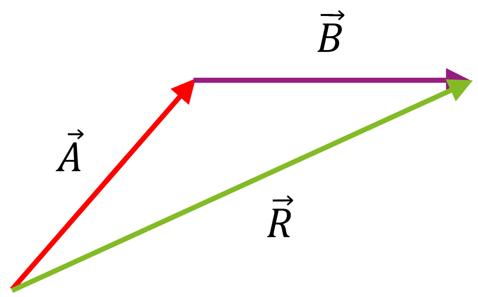


Fig. 1.19. Suma de vectores.

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{A}} + \vec{\boldsymbol{B}} \tag{1.18}$$

Una forma de definir la suma de vector por el método gráfico es colocando, por ejemplo, el punto inicial de un vector (vector $\vec{B}$) en el punto final del otro vector (vector $\vec{A}$), siendo el vector resultante (vector $\vec{R}$) el vector desde el punto inicial del vector $\vec{A}$ al punto final del vector $\vec{B}$.

De acuerdo con el paralelogramo de la Fig. 1.20 y las proyecciones de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ podemos inferir en la propiedad de la propiedad conmutativa de la suma de vectores, por lo que observamos en la ecuación 1.19:

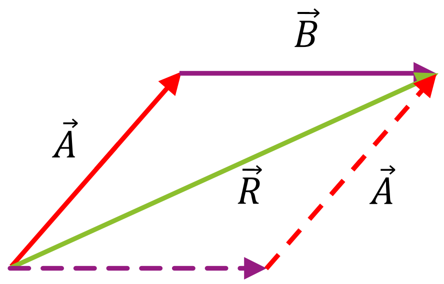


Fig. 1.20. Suma de vectores por paralelogramo.

$$\vec{\boldsymbol{A}} + \vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\boldsymbol{B}} + \vec{\boldsymbol{A}} \tag{1.19}$$

Con la noción del inverso aditivo ya discutido, podemos analizar geométricamente la diferencia entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, en la Fig. 1.21 en el triángulo (1) se observa en la proyección opuesta del vector $\vec{B}$ el criterio de suma el cual se expresar matemáticamente como la ecuación 1.20:

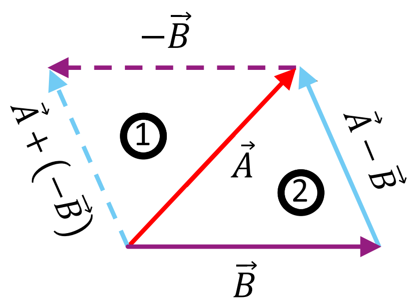


Fig. 1.21. Resta de Vectores por paralelogramo (a).

$$\vec{\boldsymbol{A}} + (-\vec{\boldsymbol{B}}) = \vec{\boldsymbol{A}} - \vec{\boldsymbol{B}} \tag{1.20}$$

Mientras que en el triángulo 2 se puede notar que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ parten del mismo punto de origen, lo que quiere decir que para restar vectores basta con hacer coincidir los dos vectores para obtener la diferencia. Analicemos ahora en la Fig. 1.22 que ocurre si aplicamos el inverso aditivo al vector $\vec{A}$. Se puede observar que (ecuación 1.21):

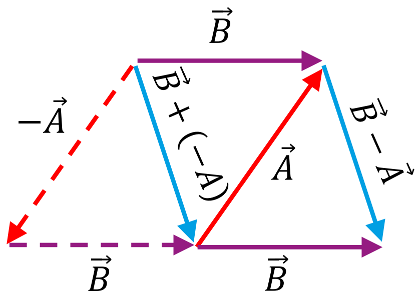


Fig. 1.22. Resta de vectores por paralelogramo (b).

$$\vec{\boldsymbol{B}} + \left(-\vec{\boldsymbol{A}}\right) = \vec{\boldsymbol{B}} - \vec{\boldsymbol{A}} \tag{1.21}$$

Por lo que podemos comparar ente la Fig. 1.21 y 1.22 que las diferencias corresponden a dos vectores diferentes, por lo tanto (ecuación 1.22):

$$\vec{\boldsymbol{A}} - \vec{\boldsymbol{B}} \neq \vec{\boldsymbol{B}} - \vec{\boldsymbol{A}} \tag{1.22}$$

Podemos concluir que el orden entre la suma de dos vectores no tiene relevancia, mientras que para la diferencia entre los dos vectores si es de importancia y corresponden a dos vectores diferentes [1].

B. *Componentes de un Vector*

Hasta este momento hemos determinado de la sección anterior la resultante de un vector utilizando meramente la geometría empleada para triángulos rectángulos, es por ello por lo que nos limitamos cuando estos vectores no representan triángulos rectángulos. Una manera alternativa sencilla de obtener la resultante de un vector es a través de sus componentes [2].

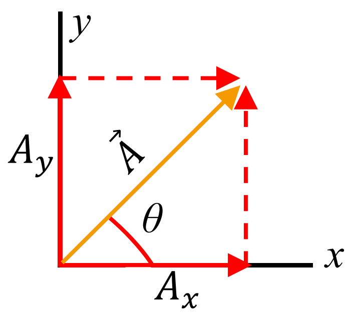


Fig. 1.23. Componentes de un vector.
Fuente Elaboración propia.

La Fig. 1.23 muestra las componentes de un vector con sus proyecciones horizontales y verticales, en esta se observa la formación de un triángulo rectángulo con ángulo θ. De acuerdo con la sección IX-A podemos determinar las componentes del vector usando las funciones trigonométricas como en la ecuación 1.23, ecuación 1.24 y ecuación 1.25:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{A_y}{A} \Rightarrow A_y = A\operatorname{sen}\theta \tag{1.23}$$

$$\cos\theta = \frac{A_x}{A} \Rightarrow A_x = A\cos\theta \tag{1.24}$$

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} \qquad \Rightarrow \ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right) \tag{1.25}$$

Por Pitágoras podemos encontrar la magnitud del vector como en la ecuación 1.26:

$$|\vec{A}| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2} \tag{1.26}$$

Podemos analizar ahora la suma por componentes, considerando la Fig. 1.19, podemos comparar la suma por el método del paralelogramo y componentes (ecuación 1.27)(ecuación 1.28)(ecuación 1.29):

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x) + (A_y + B_y) = R_x + R_y \qquad (1.27)$$

$$R_x = A_x + B_x \qquad (1.28)$$

$$R_y = A_y + B_y \qquad (1.29)$$

Por lo que basta con realizar la suma con su respectivo signo (de acuerdo con la Fig. 1.24) de cada una de sus componentes para obtener así el vector resultante.

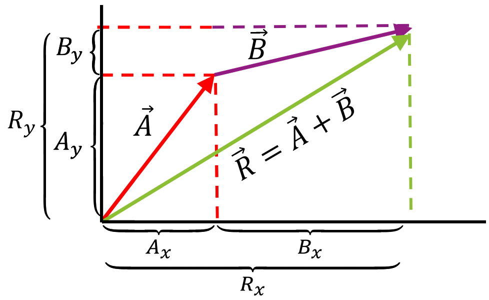


Fig. 1.24. Suma de vectores por componentes.

C. *Vectores Unitarios*

Los Vectores Unitarios son una representación de vectores en el espacio, la finalidad de estos vectores radica únicamente en direccionar el vector indicando sus componentes con las letras minúsculas cursivas i, j y k, con un símbolo ($\hat{\square}$) en la parte superior para identificarlo como un vector unitario $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ tal como muestra la Fig. 1.25. Estos vectores tienen como magnitud 1, es decir, $|\hat{\imath}| = |\hat{\jmath}| = |\hat{k}|$.

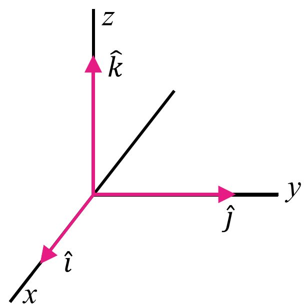


Fig. 1.25. Vectores Unitarios.

Por lo que los vectores de la Fig. 1.22 se pueden representar como en la ecuación 1.30 y en la ecuación 1.31:

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}, \tag{1.30}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} \tag{1.31}$$

Al realizar la suma vectorial de los dos vectores se escriben de forma vectorial como en la ecuación 1.32 y la ecuación1.33:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath} \tag{1.32}$$

$$\vec{R} = R_x\hat{\imath} + R_y\hat{\jmath} \tag{1.33}$$

Esta es la forma como se deben de escribir los vectores, en términos de sus vectores unitarios [3].

Ejemplo 1.5

Un marinero en un barco pequeño se desplaza al este 3.00 km, en ese momento corre un fuerte viento que hace cambiar de recorrido del barco hacia el noreste por 4.00 km, finalmente el marinero trata de enderezar su barco hacia el sureste a 30° por 3.50 km para continuar con la dirección inicial de movimiento (Fig. 1.26). ¿Cuál es su desplazamiento desde que inició el movimiento hasta la última posición?

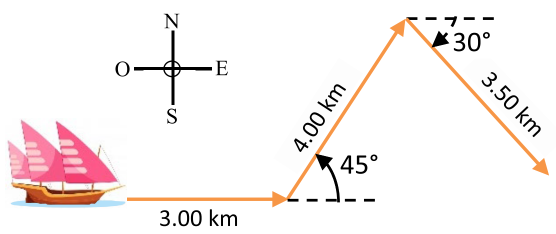


Fig. 1.26. Trayectos recorridos por el barco.

• *Solución*

De acuerdo con la suma de vectores por el método gráfico, el vector desplazamiento estaría dirigido hacia el noreste (I cuadrante). Analizaremos este problema por el método de las componentes, inicialmente trasladaremos los vectores a los cuadrantes correspondientes y le llamaremos magnitud del vector $A = 2.00\ km$, $B = 4.00\ km$ y $C = 3.50\ km$ para luego encontrar las componentes de cada uno de los vectores desplazamiento.

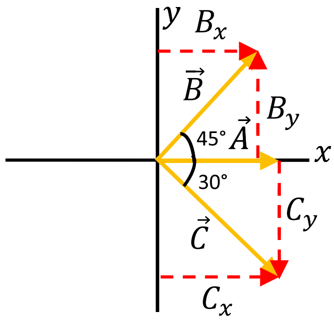


Fig. 1.27. Componentes cartesianas de los vectores dados.

De acuerdo con la Fig. 1.22 y a las funciones trigonométricas las componentes de los vectores son como se observa en la Fig. 1.27.

El vector $\vec{A}$ solo tiene componentes en el eje x, por lo que la componente en el eje y es cero.

$$\vec{A} = (3.00\hat{\imath} + 0.00\hat{\jmath})\ km$$

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{B_y}{B} \Rightarrow B_y = B \operatorname{sen} 45°$$

$$B_y = (4.00km) \operatorname{sen} 45° \Rightarrow B_y = 2.82\ km$$

$$\cos 45° = \frac{B_x}{B} \Rightarrow B_x = B \cos 45° \Rightarrow B_z = (4.00km) \cos 45° \Rightarrow B_z = 2.82\ km$$

Luego se expresa el vector $\vec{B}$ en términos de sus vectores unitarios.

$$\vec{B} = (2.82\hat{\imath} + 2.82\hat{\jmath})\ km$$

De la misma manera se procede con el vector $\vec{C}$:

$$\text{sen } 30° = \frac{C_y}{C} \Rightarrow C_y = C \text{ sen } 30°$$

$$C_y = (3.50km) \text{ sen } 30° \Rightarrow C_y = 1.75 \; km$$

$$\cos 30° = \frac{C_x}{C} \Rightarrow C_x = C \cos 30° \Rightarrow C_y = (3.50km) \cos 30° \Rightarrow C_z = 3.03 \; km$$

Luego se expresa el vector $\vec{C}$ en términos de sus vectores unitarios:

$$\vec{C} = (3.03\hat{\imath} - 1.75\hat{\jmath}) \; km$$

Luego, sumando los tres vectores obtenemos el vector resultante.

$$\begin{array}{c} \vec{A} = (3.00\hat{\imath} + 0.00\hat{\jmath}) \; km \\ \vec{B} = (2.82\hat{\imath} + 2.82\hat{\jmath}) \; km \\ \vec{C} = (3.03\hat{\imath} - 1.75\hat{\jmath}) \; km \\ \hline \vec{R} = (8.85\hat{\imath} + 1.07\hat{\jmath}) \; km \end{array}$$

Por lo que podemos ver que el vector se encuentra en el primer cuadrante (al noreste).

La magnitud del desplazamiento se puede obtener por Pitágoras como,

$$|\vec{R}| = \sqrt{(8.85 \; km)^2 + (1.07 \; km)^2} = 8.91 \; km$$

Para encontrar la dirección del vector resultante utilizamos la función tangente

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1.07}{8.85}\right) \Rightarrow \quad \theta = 6.9° \text{ al noreste}$$

Por tanto, el barco se desplazó a 8.91 km a 6.9° al noreste.

Preguntas

P1. Para encontrar la conversión de km/h a m/s, uno es lo pasos es multiplicar la cantidad por 1000 m. ¿Si, no? Explique.

P2. ¿Cuáles son las unidades fundamentales de longitud, masa y tiempo en el sistema internacional de medidas?

P3. ¿Para comprobar una ecuación se utiliza el análisis dimensional, para esto es necesario utilizar las tablas de conversiones? Explique.

P4. ¿El cálculo de una incertidumbre en la medida se determina igual para una medida directa e indirecta? ¿Existe alguna diferencia? Explique.

P5. ¿Qué representa el error porcentual en una medida?

P6. Explique una manera sencilla se poder linealizar una curva cuadrática y qué expresión corresponde a la pendiente.

P7. ¿La función trigonométrica *sen* θ puede ser utilizada en todos los triángulos? ¿si? ¿no? Explique.

P8. Explique en que consiste la conversión de unidades y para que se utiliza.

P9. Los vectores libres pueden ser movidos a través de todo el espacio, ¿es posible encontrar un vector con una componente vertical de un vector y una componente horizontal de otro vector?

P10. ¿La suma de vectores cumple con la propiedad asociativa? Explique sus razones.

Ejercicios Propuestos

1. Una de las ecuaciones que representa un movimiento acelerado es $x = v_0 t^m + 0.5at^n$, donde x es la posición con unidades de longitud L, v_0 velocidad con unidades L/T, a aceleración L/T^2 y t tiempo con unidad de tiempo T. De acuerdo con esto el valor que debe tener los exponentes m y n para que sean dimensionalmente correctas son respetivamente:

a. 1 y 2.

b. 3 y 1.

c. 2 y 1.

d. 1 y 3.

2. 2. Sea la ecuación $v = At^2 + Ba$, con v velocidad y t tiempo, de acuerdo con esto las unidades de A y B para que sean dimensionalmente correctas son respectivamente.

a. L y L/T.

b. L/T^3 y L/T.

c. L/T y T.

d. L/T^3 y T.

3. Una memoria de USB 1 tiene una capacidad de 16 GB mientras que otra USB 2 tiene una capacidad de 2 TB, de acuerdo con la tabla de prefijos cuál de las dos memorias contiene mayor capacidad de almacenamiento.

a. La USB 1 es igual a la USB 2.

b. La USB 2.

c. La USB 1.

d. No es posible saberlo.

5. Un maestro de obra realiza una medida del área rectangular de un terreno para realizar una construcción, tomando medidas de ancho y profundidad de 6 m × 12 m. ¿Cuántas pulgadas cuadrados tiene esta área?

a. 1116 in^2

b. 1500 in^2

c. 825 in^2

d. 2834 in^2

5. Un avión se desplaza por los cielos a una velocidad de 1040 km/h en sentido Oeste – Este. ¿Cuál es la distancia en millas/h?

a. 700.00 millas/h

b. 646.36 millas/h

c. 2326.91 millas/h

d. 542.46 millas/h

6. En un laboratorio de física se realizaron medidas de masa y volumen de una sustancia X, pudiendo medir el valor de la densidad de 1420 kg/m^3. La medida de esta densidad en g/cm^3 es:

a. 1.42 g/cm^3

b. 1.00 g/cm^3

c. 1420 g/cm^3

d. 1420000 g/cm^3

7. Una cometa es elevada a un ángulo de 22°, en ese momento la cometa queda estancada sobre un árbol a una altura h cuando la cuerda tiene una longitud de 90 pies (Fig. 1.28). El valor de la altura a la cual se estancó la cometa es:

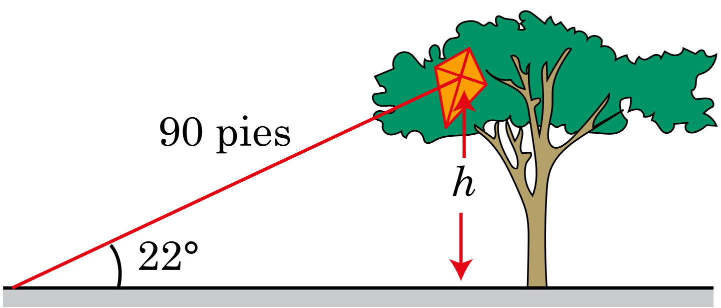


Fig. 1.28. Vista de la cometa desde el suelo.

a. 25.2 ft

b. 50.0 ft

c. 22.5 ft

d. 33.7 ft

8. Una escalera de longitud de 10 m es colocada sobre una pared, de manera inclinada formando un ángulo de 60° con respecto al suelo, tal como se muestra en la Fig. 1.29. ¿Cuál es la distancia de separación de la escalera con la pared?

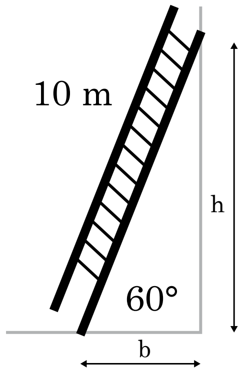


Fig. 1.29. Escalera colocada sobre la pared.

a. 10.0 m

b. 5.0 m

c. 15.0 m

d. 20.0 m

9. Un estudiante de física realiza una serie de medidas de un objeto en forma de paralelepípedo ortoedro midiendo cada uno de sus lados, las medidas fueron tomadas con un instrumento de medición con sensibilidad de 0.05 mm. En la Tabla 1.5 se muestran los datos obtenidos de las medidas de cada uno de sus lados.

Tabla 1.5
Datos tomados por el estudiante

Medida	Lado (cm)	Ancho (cm)	Alto (cm)
1	1.23	2.32	10.17
2	1.22	2.31	10.16
3	1.23	2.30	10.17
4	1.22	2.29	10.16

Encuentre el valor central ± incertidumbre del volumen del paralelepípedo. *Sugerencia*. Use $V = Lado \times Ancho \times Alto$.

a. (28.70 ± 2.50) cm.

b. (28.70 ± 0.80) cm.

c. (28.70 ± 1.89) cm.

d. (28.70 ± 1.25) cm.

10. En un laboratorio de física se tomaron datos de posiciones en el eje "x" e "y" que representan el comportamiento de una esfera, como muestra en la Tabla 1.6. ¿Qué comportamiento representan los datos de la tabla? ¿Qué valor tiene la pendiente?

Tabla 1.6
Datos tomados en el laboratorio

x	0	1	2	4
y	0	3	6	12

11. Un experimento x fue realizado en un laboratorio de física, tomando los datos mostrados en la siguiente Tabla 1.7. a) Realice la gráfica de x vs y, y determine qué tipo de grafico corresponde. b) Linealice la gráfica y determine el valor de la pendiente.

Tabla 1.7
Datos tomados en el laboratorio de física

x	0	1	2	3	4	5
y	0	6	20	42	72	110

12. Sean tres vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ orientados como se ilustran a continuación (Fig. 1.30), determine gráficamente la dirección del vector resultante $(\vec{A}+\vec{B})-\vec{C}$.

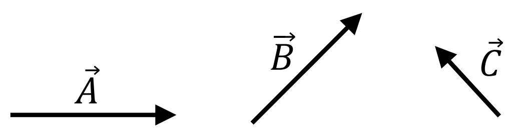


Fig. 1.30. Vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ (1).

a. $\nearrow$

b. $\nwarrow$

c. $\searrow$

d. $\rightarrow$

13. Sean dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, con $\vec{A} = (2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath})\ u = (2 + 3)u$ y $\vec{B} = (4\hat{\imath} + 6\hat{\jmath})\ u$, la magnitud del vector resultante $3\vec{A} - \vec{B}$ corresponde a un valor de:

a. $\sqrt{45}\,u$

b. $\sqrt{15}\,u$

c. $\sqrt{11}\,u$

d. $\sqrt{13}\,u$

14. Dados los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ en el plano cartesiano con magnitudes de 100 m, 120 m y 140 m respectivamente, como muestra la Fig. 1.31. Determine la dirección del vector resultante.

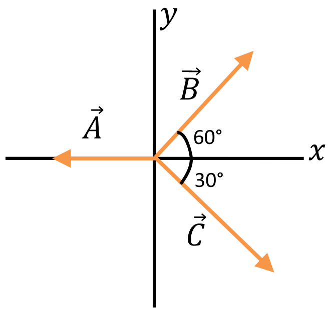


Fig. 1.31. Vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ (2).

a. 6.87° al Noreste

b. 83.1° al Sureste

c. 6.87° al Sureste

d. 83.1° al Noreste

15. Una persona parte de su lugar de residencia con destino a una tienda para comprar víveres, él camina siguiendo una trayectoria como la que se muestra a continuación en la Fig. 1.32. Los desplazamientos realizados para llegar hasta la tienda son cuatro trayectos en línea recta. Cuando la persona ha llegado a la tienda, ¿cuál es la magnitud del desplazamiento resultante de la persona, desde que salió de su lugar de residencia?

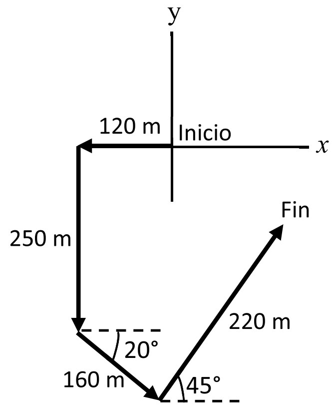


Fig. 1.30. Trayectoria.

a. 283.3 m.

b. 238.3 m.

c. 469.1 m.

d. 496.1 m.

Cinemática

El estudio del movimiento ha sido algo que siempre ha llevado al ser humano a explorar las distintas formas en que este sucede en la vida cotidiana, y cuáles son las diferentes causas que producen estos efectos. En este capítulo se muestran las diferentes clases de movimiento, tales como el Rectilíneo Uniforme, Acelerado Uniforme, Caída libre, el Lanzamiento de Proyectiles y el Movimiento Circular Uniforme; los cuales se dan en una y dos dimensiones. Antes de analizar cada uno de los casos mencionados se definirán los conceptos a utilizar en cada caso para así comprender mejor cada uno de los temas a tratados.

I. Movimiento Rectilíneo Uniforme

Este tipo de movimiento que se da en una sola dimensión, siendo además el tipo de movimiento más sencillo que existe, el cual consiste en un cuerpo que se mueve con velocidad constante. Cabe denotar que siempre es constante y además es posible determinar la posición del cuerpo en cualquier instante de tiempo por medio de la ecuación $x = vt$.

Donde x es la *Posición*, v la *Velocidad* (constante) y t el *Tiempo*. Tenga presente que la *Posición* es el movimiento de una partícula, y este es conocido por completo cuando es conocida la posición de la partícula en todo momento. Además, el valor obtenido para la posición, indica el punto en el cual se encuentra la partícula con respecto a un punto de referencia escogido como origen en un sistema de coordenado.

Sí se gráfica la *Posición* "x" en función del *Tiempo* "t", el resultado es una línea recta en forma ascendente (Fig. 2.1).

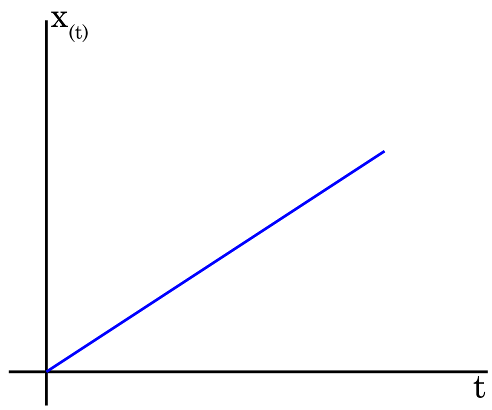


Fig. 2.1. Gráfico de Posición vs Tiempo en el Movimiento Rectilíneo Uniforme.

Como se mencionó anteriormente la *Velocidad* es constante, de modo que, al graficar la velocidad en función del tiempo, el resultado es una línea recta paralela al eje *x* (Fig. 2.2) [2].

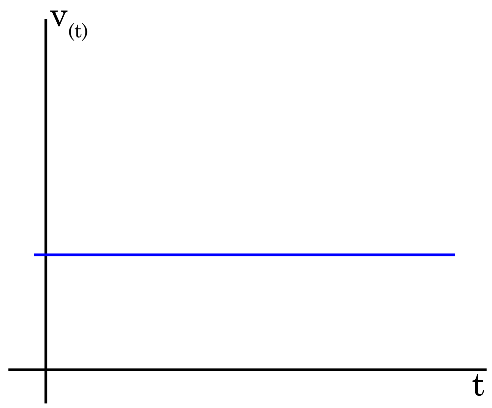


Fig. 2.2. Gráfico de Velocidad vs Tiempo en el Movimiento Rectilíneo Uniforme.

A. *Desplazamiento y Distancia Recorrida*

Cuando una persona camina una cierta cantidad de distancia desde un punto de partida hasta un punto de llegada se pueden percibir dos conceptos que son fundamentales, como lo son el desplazamiento y la distancia recorrida, los cuales a simple vista parecerían que fuesen iguales pero la realidad es que difieren uno del otro, tal como se definieron en los conceptos previos de este capítulo.

Recordemos que el *Desplazamiento* ($\Delta\vec{x}$) se define como la diferencia entre el punto de llegada y el punto de partida, el *Desplazamiento* es entonces la línea recta que une estos dos puntos, mientras que la distancia recorrida (S) es la trayectoria que une el punto de inicio con el punto de llegada y es totalmente independiente del desplazamiento. En otras palabras, es posible definirla como la suma de las trayectorias desde el punto de partida hasta el punto de llegada.

Cabe resaltar que en los casos en los cuales el punto de llegada sea igual al punto de inicio, entonces el desplazamiento es cero, pero la distancia recorrida no. esto se puede ilustrar mejor en el siguiente gráfico (Fig. 2.3).

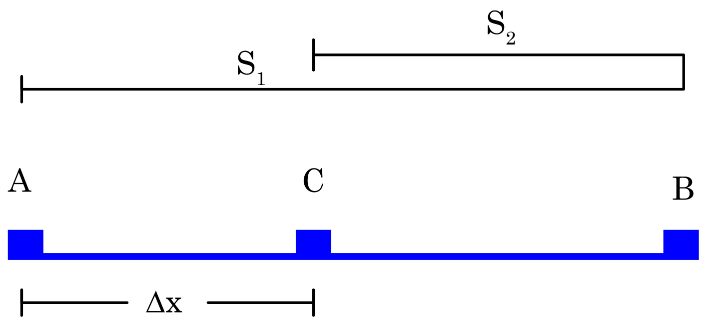


Fig. 2.3. Distancia recorrida y desplazamiento.

Donde se tiene una partícula que se mueve desde un punto A hasta un punto B y luego llega a un punto C. Ahora, $\Delta\vec{x}$ es el desplazamiento y la suma de S_1 con S_2 es la distancia recorrida.

Asociados a estos conceptos están definidos la velocidad y rapidez medias, los cuales son importantes ya que relacionan las variables anteriores.

Velocidad Media: La velocidad media de una partícula está definida como el desplazamiento, dividido entre el tiempo empleado en realizar dicho desplazamiento. Esto es (ecuación 2.1):

$$\bar{v} = \frac{\overrightarrow{\Delta x}}{\Delta t} \tag{2.1}$$

Rapidez Media: La rapidez media de una partícula está definida como la distancia total recorrida dividida entre el tiempo empleado en realizar dicho recorrido. Esto es (ecuación 2.2):

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{t}} \tag{2.2}$$

B. *Velocidad y Rapidez Instantáneas*

A partir de los conceptos anteriores se pueden definir la velocidad y la rapidez instantáneas, para poder calcular la posición de un cuerpo u objeto en cualquier instante de tiempo [3].

Rapidez Instantánea: Es la magnitud de la velocidad que posee una partícula u objeto en un determinado instante de tiempo e indica que tan rápido se mueve. Recuerde que esta es una cantidad escalar.

Velocidad Instantánea: A diferencia de la rapidez instantánea, la velocidad instantánea posee una dirección definida, que muestra la magnitud y la dirección de la velocidad en un pequeño instante de tiempo. Esto se puede escribir matemáticamente también como (ecuación 2.3):

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\boldsymbol{x}}}{\Delta \boldsymbol{t}} \tag{2.3}$$

Ejemplo 2.1

Mientras usted conduce su automóvil al ir de una ciudad “*x*” hasta otra ciudad “*y*”, se da cuenta de que recorrió 200.0 km. Sin embargo, al localizar estas ciudades en un mapa y unirlas a través de una línea recta, la distancia es 89.0 km. Si el tiempo que usted empleo durante el recorrido fue de 1 hora. ¿Cuánto fue la rapidez media del trayecto? ¿Cuánto fue la velocidad media del trayecto?

- *Solución*

Dado los datos de distancia recorrida, desplazamiento y tiempo empleado se obtienen la velocidad y rapidez medias a partir de la ecuación 2.1 y ecuación 2.2.

$$\bar{v} = \frac{89km}{1h} = 89\ km/h$$

$$v = \frac{200km}{1h} = 200\ km/h$$

Realizando las conversiones para pasar a m/s obtenemos que:

$$\bar{v} = 89\ km/h = 24.72\ m/s$$

$$v\ = 89\ km/h = 55.55\ m/s$$

II. Movimiento Uniforme Acelerado

Para definir el Movimiento Uniforme Acelerado, se debe partir del hecho de que ahora la velocidad con la que se mueve la partícula no es constante. Es decir, la velocidad final del cuerpo es diferente a la velocidad inicial. Se define entonces la aceleración como el cambio de la velocidad en función del tiempo. Lo cual se puede expresar mediante la siguiente ecuación 2.4 [2].

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_0}{t_f - t_0} \tag{2.4}$$

Donde v_f es la Velocidad Final, v_0 es la Velocidad Inicial y t es el tiempo empleado. Además, se pueden deducir otras expresiones para determinar la posición del cuerpo en este tipo de movimiento, como son la ecuación 2.5 y la ecuación 2.6.

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \tag{2.5}$$

$$v_f^2 = v_0^2 + 2ax \tag{2.6}$$

Donde x es la posición del cuerpo, v_f es la velocidad final, v_0 es la velocidad inicial, $\vec{a}$ es la aceleración y t es el tiempo. Es posible determinar la aceleración con cualquiera de estas ecuaciones y dado el caso en que se obtuviese una aceleración negativa, entonces se interpreta como que el cuerpo en movimiento se está desacelerando o frenando su movimiento.

Es posible determinar la aceleración de un cuerpo en cualquier instante de tiempo dado, a este concepto se le llama aceleración instantánea.

Aceleración Instantánea: El cambio de velocidad producido por un cuerpo en pequeño instante de tiempo. Es decir (ecuación 2.7):

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \tag{2.7}$$

Ahora, cabe destacar que la gráfica de la posición para este tipo de movimiento viene dada por el orden cuadrático de la expresión donde aparece el tiempo al cuadrado. Por lo tanto, esto representa una parábola que tiene la forma de la Fig. 2.4.

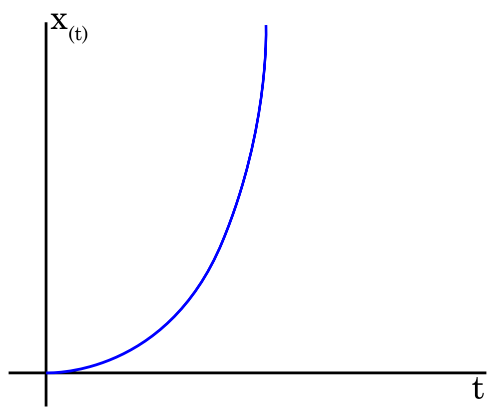


Fig. 2.4. Posición en el Movimiento Uniforme Acelerado.

De igual forma, de las ecuaciones de la velocidad se puede observar el comportamiento lineal que presentan, de modo que si se representa en un plano cartesiano el gráfico sería como en la Fig. 2.5.

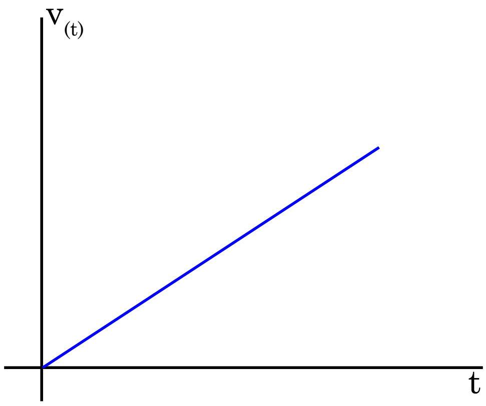


Fig. 2.5. Velocidad en el Movimiento Uniforme Acelerado.

Ahora, esto muestra la relación que existe entre la aceleración y la velocidad, donde se tiene claramente que la aceleración es constante en el tiempo, y que incrementa la velocidad en cada unidad de tiempo con el valor que esta tiene. Ahora. La gráfica de la aceleración en función del tiempo es entonces una línea recta paralela al eje x, como se muestra en la Fig. 2.6.

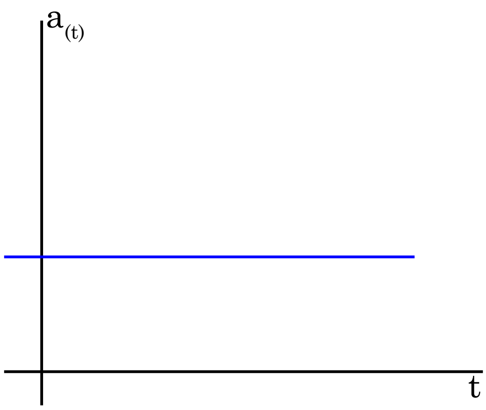


Fig. 2.6. Aceleración en el MUA.

Desde la primera ecuación se ve que la aceleración es la variación de la velocidad con respecto al tiempo, así como la velocidad es la variación de la posición en función del tiempo. Además, como se ve en las gráficas, cada uno de estos conceptos se pueden relacionar a través de una derivada, donde la derivada de la posición con respecto al tiempo es la velocidad y la derivada de la velocidad con respecto al tiempo es la aceleración. Estas derivadas se pueden representar como siguen (ecuación 2.8) (ecuación 2.9):

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \tag{2.8}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \tag{2.9}$$

Un ejemplo de esto sería derivando la ecuación 2.5 con respecto a t, y el resultado de esto es la velocidad. de igual forma sucede al derivar la velocidad con respecto al tiempo, se obtiene la aceleración $\vec{a}$.

Ejemplo 2.2

Encuentre la aceleración y la distancia necesaria para que un cuerpo cambie su velocidad desde el reposo hasta 30 km/h en un tiempo de 10 segundos.

- *Solución*

Para encontrar la aceleración se utiliza la ecuación 2.4 donde, v_0 es cero puesto que parte del reposo y t_0 es cero.

Convirtiendo los 30 km/h en m/s. se tiene: 30 km/h = 8.33 m/s.

Remplazando los valores obtenemos.

$$\vec{a} = \frac{8.33\ m/s - 0}{10\ s - 0} = \frac{8.33\ m/s}{10\ s} = \mathbf{0.833\ m/s^2}$$

Para encontrar la distancia necesaria aplicamos la ecuación 2.5 donde, v_0 es cero puesto que parte del reposo, por lo cual se elimina el primer término, quedando así:

$$x = \frac{1}{2}at^2$$

Remplazando los valores de aceleración y tiempo obtenemos:

$$x = \frac{1}{2}(0.833\ m/s^2)(10\ s)^2$$

$$x = 41.66\ m$$

III. Caida Libre

En física, para el caso de la caída libre de los cuerpos, se tiene que es un caso particular del movimiento acelerado teniendo en cuenta que ahora se trabaja con una aceleración que es constante y que se debe a la acción de la gravedad, que como bien se sabe tienen actúa verticalmente y apunta siempre hacia el centro de la tierra y tiene un valor constante de 9,8 m/s^2.

Ahora, siendo este un caso particular del movimiento acelerado, se tienen en cuenta entonces las mismas ecuaciones que las del movimiento acelerado uniforme haciendo los respectivos cambios de variable, estos son, a por g y x por y. en esta forma las ecuaciones para el movimiento de caída libre son la ecuación 2.10, ecuación 2.11 y ecuación 2.12 [3].

$$\vec{v}_f = \vec{v}_0 - gt \tag{2.10}$$

$$\vec{v}_f^2 = \vec{v}_0^2 - 2g(y - y_0) \tag{2.11}$$

$$y = y_0 + \vec{v}_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2.12}$$

Donde se ha introducido también el termino y_0 el cual viene a ser la altura inicial con respecto al suelo. Note que para cuándo $y_0 = 0$ entonces quedan las ecuaciones muy similares a las de movimiento acelerado. Además, que se ha tomado el valor de g como negativo, puesto que la gravedad siempre viene hacia abajo.

Ahora, se pueden dar dos posibles casos, para analizar el movimiento de caída libre. El primero es cuando se suelta un objeto desde una altura con respecto al suelo, ilustrado en la Fig. 2.7.

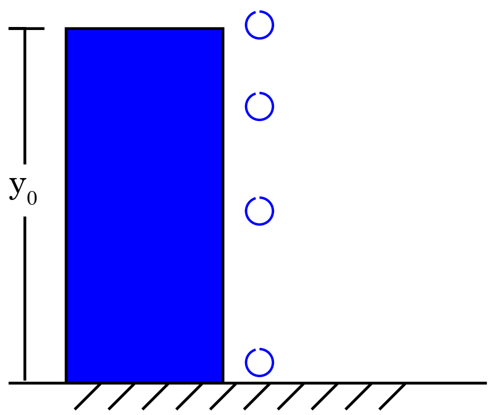


Fig. 2.7. Objeto en Caída Libre.

El segundo caso es cuando se lanza un objeto verticalmente hacia arriba desde el suelo, o desde una altura inicial y_0, entonces el objeto describirá cada una de las trayectorias mostradas en la Fig. 2.8.

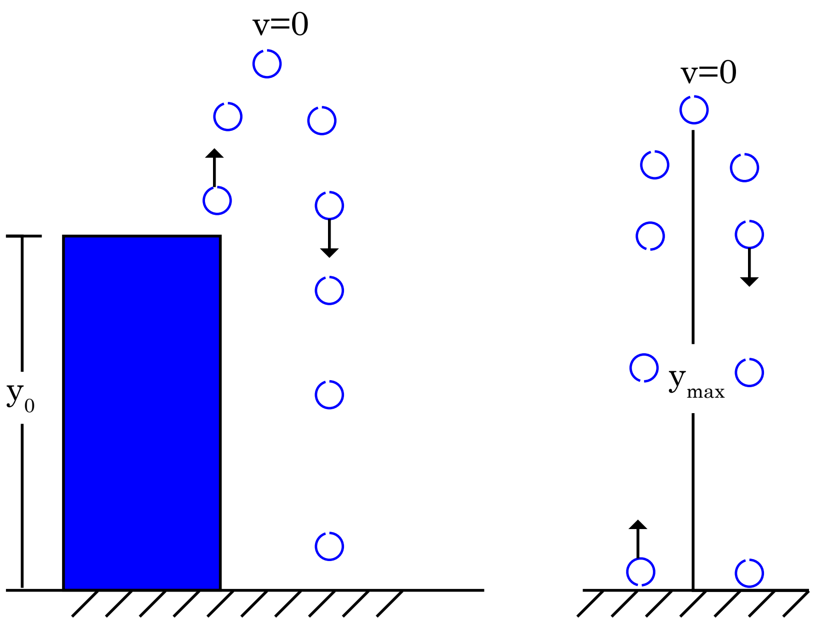


Fig. 2.8. Objeto lanzado hacia arriba, sometido a la aceleración de la gravedad.

El caso mostrado en la figura 2.8 la trayectoria mostrada por las partículas disminuye su velocidad inicial v_0 a medida que va aumentando la altura, esto debido a la dirección de la aceleración de la gravedad. Cuando llega a su punto más alto su velocidad es cero. Nótese que mientras el movimiento viene en fase de descenso el vector velocidad cambia de dirección [4].

Las gráficas para posición, velocidad y aceleración tienen la misma forma que en el caso del movimiento uniforme acelerado, representando una parábola, una recta creciente y una recta paralela al eje x para la posición, velocidad y aceleración respectivas. Al igual que en el caso anterior la velocidad viene relacionada con cada una de las derivadas correspondientes, es decir, al derivar la posición en y es posible obtener la velocidad y evaluarla en ese punto, al igual que al derivar la velocidad, obtendremos la aceleración de la gravedad (g).

Ejemplo 2.3

Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba, desde el suelo, y alcanza la altura de un edificio cercano, la piedra llega al piso después de 5,6 segundos. ¿Qué altura tiene el edificio?

- *Solución*

Para calcular la altura del edificio, se tiene en cuenta que el tiempo de subida es el mismo tiempo que emplea en bajar, y además se debe calcular la velocidad inicial con la que es lanzada la piedra.

Para calcular la velocidad inicial se tiene en cuenta que la velocidad final es cero, considerando que llega a su punto más alto. Para esto, utilizamos la ecuación 2.10:

$$\vec{v}_o = gt$$

Donde el tiempo viene siendo 2.8 s

$$\vec{v}_o = (9.8\,m/s^2)(2.8\,s)$$

$$\vec{v}_o = 27.44\,m/s$$

Observe que la velocidad es positiva por lo que esta está dirigía verticalmente hacia arriba por lo que el resultado se puede expresar vectorialmente como:

$$\vec{v}_o = 27.44\frac{m}{s}\hat{j}$$

Para encontrar la altura del edificio, se utiliza la ecuación 2.12, donde $y_0 = 0$, y el tiempo es 2.8 s.

$$y = (27.44\ m/s)(2.8\ s) - \frac{1}{2}(9.8\ m/s^2)(2.8\ s)^2$$

$$y = 38.42\ m$$

IV. Movimiento de Proyectiles

Puesto que hasta el momento solo se han analizado movimientos en una sola dimensión, tal como lo fue el movimiento rectilíneo o el movimiento de caída libre. El Movimiento de Proyectiles es del caso donde se tiene un movimiento en dos dimensiones, el movimiento de proyectiles es un movimiento combinado de estos dos tipos de movimiento y como tal se debe tener en cuenta el movimiento en las coordenadas x e y. para describir y ver mejor este movimiento, se analiza el siguiente gráfico (Fig. 2.9).

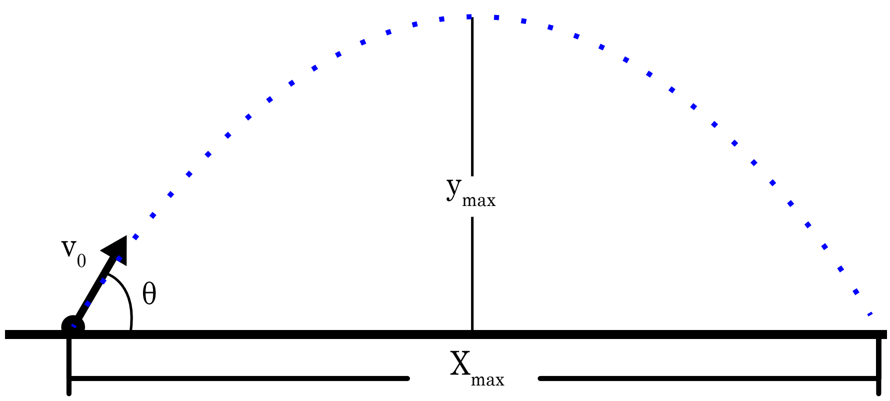


Fig. 2.9. Trayectoria de un proyectil.

La Fig. 2.9 describe el movimiento de un proyectil que es lanzado con una velocidad inicial v_0, inclinado con un ángulo θ, respecto al eje x, la trayectoria seguida por el objeto es entonces la mostrada en la figura anterior. Ahora, el movimiento sobre el eje x es constante ya que se está moviendo con una velocidad en x constante. Mientras el movimiento sobre el eje y es afectado por la acción de la gravedad. De este modo las ecuaciones para las coordenadas tanto en x como en y vienen dadas por las ecuación 2.13 y la ecuación 2.14 [4]:

$$\boldsymbol{x = v_x t} \tag{2.13}$$

$$\boldsymbol{y = y_0 + v_y t - \frac{1}{2} g t^2} \tag{2.14}$$

Donde v_x y v_y vienen dados por las componentes vectoriales de la velocidad inicial. Es decir, $v_x = v_0 cos\theta$ y $v_y = v_0 sen\theta$, con estas ecuaciones es posible calcular la posición del objeto en cualquier instante de tiempo. Es notable que la posición en y es afectada por la gravedad y que mientras el cuerpo va subiendo v_y viene disminuyendo. Esto se puede apreciar mejor en la siguiente gráfica (Fig. 2.10).

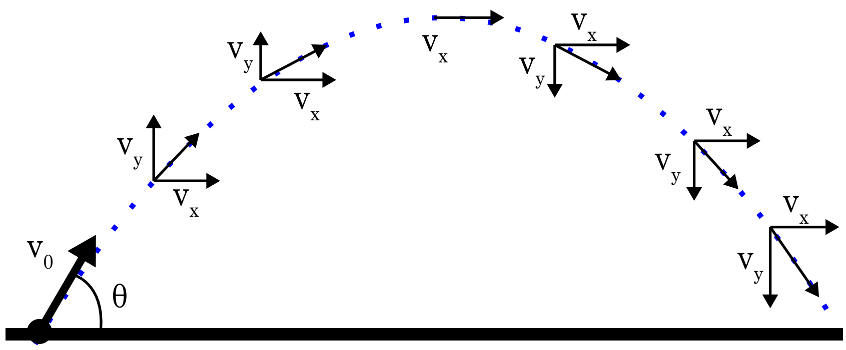


Fig. 2.10. Variación en la velocidad en las coordenadas x e y durante la trayectoria recorrida de un proyectil.

Otras relaciones importantes para calcular valores cómo máximo alcance horizontal o vertical, tiempo de subida, entre otros son (ecuación 2.15) (ecuación 2.16) (ecuación 2.17) (ecuación 2.18).

$$y_{max} = \frac{v_0^2 sen^2\theta}{2g} \tag{2.15}$$

$$t_{subida} = \frac{v_0 sen\theta}{g} \tag{2.16}$$

$$x_{max} = \frac{v_0^2 sen2\theta}{g} \tag{2.17}$$

$$y = xtan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 cos^2\theta} \tag{2.18}$$

Donde, esta última ecuación es conocida como la ecuación cartesiana de la trayectoria, por medio de la cual se puede calcular la posición en y del objeto en función de x, el ángulo de tiro θ, la velocidad inicial v_0 y la gravedad g. Cabe resaltar que en este caso donde se lanza un objeto desde el suelo el tiempo de subida es el mismo que el tiempo que emplea en caer. Ahora, Puede darse el caso para el cual el objeto es lanzado desde una altura inicial, como la azotea de un edificio o la cima de un acantilado. Tal como se ilustra en la Fig. 2.11.

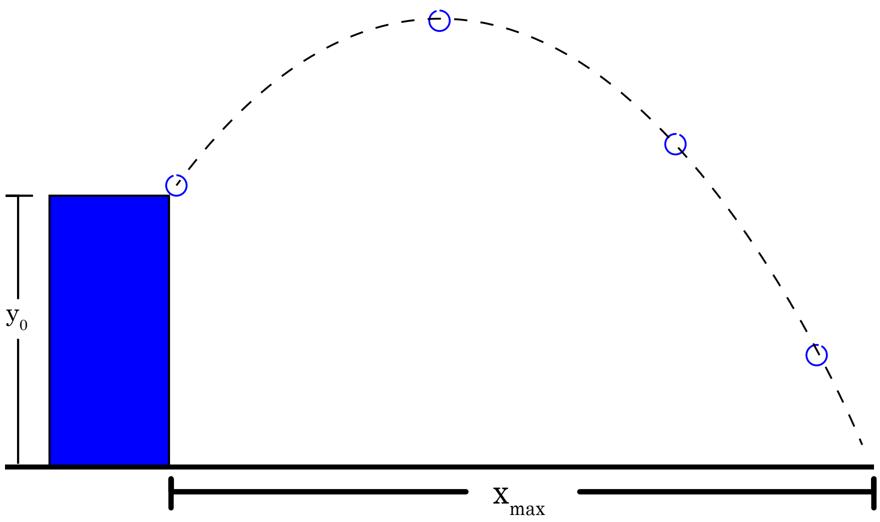


Fig. 2.11. Trayectoria de un proyectil desde una altura inicial.

En dicho caso se debe aplicar la ecuación cartesiana de la trayectoria y resolver para determinar el alcance máximo x_{max} conociendo el valor de y_0. Es posible determinar también las velocidades tanto en x como en y en cualquier instante de tiempo, a partir de las derivadas con respecto al tiempo de las posiciones (dos primeras ecuaciones), derivando estas expresiones quedan de la siguiente forma [3].

$$\frac{dx}{dt} = v_x = v_0 cos\theta \tag{2.19}$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y = v_0 sen\theta - gt \tag{2.20}$$

De donde se puede observar claramente que la velocidad en x es constante, mientras la velocidad en v se ve afectada por la gravedad.

Ejemplo 2.4

Un Futbolista golpea un balón con una velocidad inicial $v_0 = 37.0\ m/s$, con un ángulo de 30,18°. Encuentre la altura máxima y el tiempo de subida. ¿Cuánto es el alcance máximo horizontal?

- *Solución*

Para encontrar la altura máxima y el tiempo de subida utilizamos la ecuación 2.15 y ecuación 2.16 respectivamente.

$$y_{max} = \frac{(37.0\ m/s)^2\ sen^2(30.18°)}{2(9.8\ m/s^2)} = 17.65\ m$$

$$t_{subida} = \frac{(37.0\ m/s) sen\ (30.18°)}{9.8\ m/s^2} = 1.90\ s$$

Para obtener el alcance máximo horizontal se utiliza la ecuación 2.17

$$x_{max} = \frac{(37m/s)^2 sen\, 60.36°}{9.8m/s^2}$$

$$x_{max} = 121.41m$$

V. Movimiento Circular Uniforme

El movimiento circular uniforme consiste en la descripción de una circunferencia, con velocidad constante, a partir de una partícula que gira con respecto a un punto de referencia. Este tipo de movimiento se da en dos dimensiones donde la posición, velocidad y aceleración viene a tomar nuevas variables por el tipo de movimiento, esto es:

$$x \to \theta$$

$$v \to \omega$$

$$a \to \alpha$$

θ representa la posición (x,y), w la velocidad angular y α la aceleración angular. Al igual que en caso del movimiento rectilíneo estas variables están relacionadas con sus respectivas derivadas (ecuación 2.21)(ecuación 2.22) [3].

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{2.21}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \tag{2.22}$$

Además, se tiene la longitud de arco expresada como $s = r\theta$. Dicha longitud es la recorrida alrededor de un punto tal como se ilustra en la Fig. 2.12.

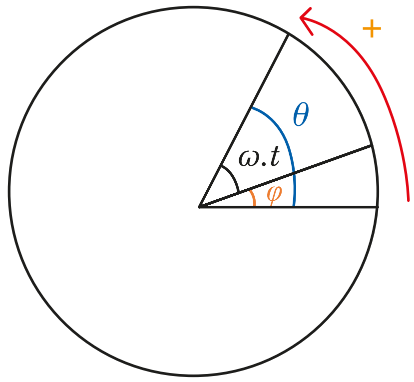


Fig. 2.12. Trayectoria en un movimiento circular.

La posición de una partícula o un cuerpo que describe un movimiento circular viene especificada por θ, si se tiene en cuenta las rotaciones en sentido horario o antihorario, se puede describir la posición de una partícula en función del tiempo como (ecuación 2.23):

$$\boldsymbol{\theta = \varphi + \omega t} \tag{2.23}$$

Donde φ, es la posición inicial de la partícula. Cuando un cuerpo o partícula se mueve con rapidez constante w, el movimiento se conoce como Movimiento Circular Uniforme. Este tipo de movimiento se caracteriza por un eje de rotación con respecto al cual gira un cuerpo o partícula, el tiempo que emplea en dar una vuelta completa es conocido como periodo (T) y la longitud que recorre la partícula durante dicho periodo es 2π, por lo que se establece que (ecuación 2.24):

$$\boldsymbol{\omega = \frac{2\pi}{T}} \tag{2.24}$$

Donde ω es la velocidad angular y el inverso del periodo es la frecuencia la cual nos indica el número de vueltas realizadas en dicho periodo (ecuación 2.25) [5].

$$f = \frac{1}{T} \tag{2.25}$$

VI. VELOCIDAD TANGENCIAL

En el movimiento circular uniforme se pueden dibujar los vectores velocidad y aceleración, teniendo en cuenta que la velocidad siempre es tangencial a la trayectoria descrita, y la aceleración centrípeta se ilustra siempre hacia el centro de la circunferencia; lo anterior se puede visualizar en la Fig. 2.13.

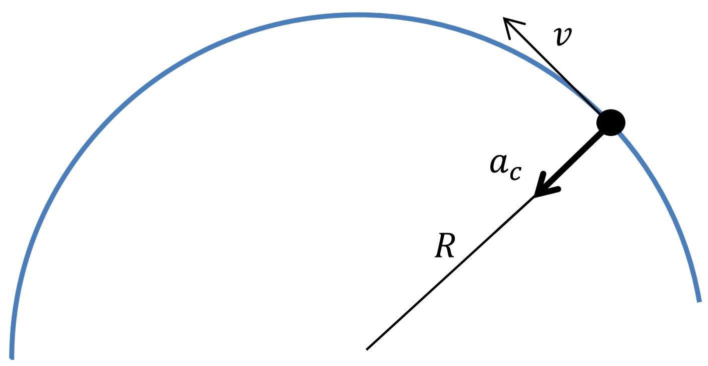


Fig. 2.13. Representación gráfica de los vectores Velocidad y Aceleración.

La magnitud de la velocidad lineal se obtiene de dividir el perímetro de la circunferencia por el tiempo empleado en recorrer dicho perímetro, esto es:

$$v = \frac{longitud}{tiempo} = \frac{2\pi R}{T} \tag{2.26}$$

Al comparar este tipo de movimiento con el rectilíneo uniforme, observamos que la velocidad lineal ahora cambia de dirección, ya que esta es tangente a la trayectoria.

Una manera de relacionar la velocidad lineal $\vec{v}$ con la velocidad angular ω es por medio de la siguiente ecuación [5].

$$\boldsymbol{v = \omega r} \tag{2.27}$$

De aquí vemos claramente la dependencia de la velocidad lineal con el radio de giro sobre el cual giran los objetos o partículas, lo cual explica la sensación que se tiene en un carrusel cuando los objetos giran, de que los objetos más alejados del eje de rotación giran con mayor rapidez, que los que se encuentran mucho más cerca. Cabe recordar que esta velocidad es un vector y que su dirección siempre es tangencial a la trayectoria seguida. Por otra parte, pese a que el movimiento se dé con velocidad constante existe una aceleración en este tipo de movimientos denominada aceleración radial, tal como su nombre lo indica está siempre dirigida hacia el centro de la trayectoria.

$$\boldsymbol{a_{rad}} = \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{r}} \tag{2.28}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (2.26), se puede obtener

$$\boldsymbol{a_{rad}} = \frac{\boldsymbol{4\pi^2 r}}{\boldsymbol{T^2}} \tag{2.29}$$

De este modo se tienen dos aceleraciones. Una que es radial (a_{rad}), que siempre apunta al centro de la trayectoria y otra que es tangencial (a), puesto que tiene la misma dirección de la velocidad angular (w).

Ejemplo 2.5

En una feria de atracciones mecánicas, la rueda de la fortuna tiene 14.0 m de radio y gira sobre un eje horizontal en su centro. La rapidez lineal de una persona que está en el borde de la rueda es constante e igual a 3.0 m/s. ¿Cuánto tiempo tarda la rueda en dar una revolución?

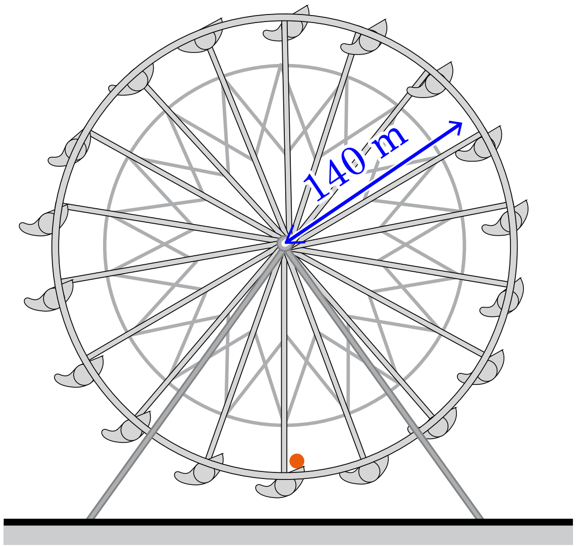


Fig. 2.14 Rueda de la fortuna.

• *Solución*

Para calcular el tiempo que tarda en dar una revolución, debemos encontrar la aceleración radial por medio de la ecuación 2.28.

$$a_{rad} = \frac{v^2}{r} = \frac{(3.0m/s)^2}{14m} = 0.64m/s^2$$

Una vez obtenemos la aceleración radial, utilizamos la ecuación 2.29 de donde se despeja el periodo y obtenemos que:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r}{a_{rad}} = \frac{4\pi^2(14.0\ m)}{0.64\ m/s^2} = 863.59\ s^2$$

Obteniendo: $T = 29.38s$.

Preguntas

P1. ¿Cuál es la característica principal del movimiento uniforme rectilíneo?

P2. Considere un recorrido de diferentes trayectos que contiene tramos curvos y otros rectilíneos hasta llegar a un punto de destino, establezca cual es diferencia entre desplazamiento y distancia recorrida.

P3. Suponga que conduce un automóvil por una autopista, donde existe fricción entre los neumáticos y la carretera, ¿Qué debe hacer para mantener la velocidad del automóvil constante?

P4. Si se considera un movimiento donde la velocidad es variable, se dice que ese tipo de movimiento es uniformemente acelerado y la velocidad varía de manera lineal, ¿se puede presentar otro caso en que la variación de la velocidad no fuera de manera lineal? Explique.

P5. Cuando se lanza un objeto verticalmente hacia arriba, este desciende, aunque la velocidad sea grande. ¿existe un valor de velocidad que evite que los cuerpos desciendan nuevamente hacía la superficie terrestre?

P6. Si se quisiera aumentar la gravedad de un planeta que se debería modificar ¿la atmosfera del planeta o la masa?

P7. En condiciones ideales el ángulo con el que un proyectil alcanza su máxima alcance horizontal es 45°. Sin embargo, en la realidad la densidad del viento es menor a mayor altura ¿Cuánto sería el ángulo ideal ahora para alcanzar el máximo alcance?

P8. La tierra gira alrededor del sol, haciendo una vuelta cada 365 días, ¿cuánto es la velocidad angular con que gira la tierra? Considere una trayectoria circular.

P9. En una feria de juegos mecánicos una rueda de la fortuna y un carrusel tienen movimiento circular uniforme. Sin embargo, uno se mueve horizontalmente y el otro verticalmente viéndose afectado por la aceleración de la gravedad. Para que ambos sistemas se mantengan en movimiento uniforme ¿se requieren las mismas condiciones? Justifique su respuesta.

P10. Suponga que la tierra realiza un movimiento circular alrededor del sol, mientras que en el modelo atómico de Bohr plantea un movimiento circular de los electrones alrededor del núcleo del átomo. Estos dos movimientos son comparables teniendo en cuenta las distancias y los tamaños. Explique.

Ejercicios Propuestos

1. Una familia que sale a vacacionar y realiza un recorrido en automóvil de 360 km en un tiempo de 2 horas, esto debido a las trayectorias curvas que hay en la vía. Si se hubiese movido en línea recta la distancia habría sido de 200 km en un tiempo de 40 minutos. ¿Cuánto es la velocidad media del automóvil? ¿Cuánto es la rapidez media del automóvil?

a. 20 m/s y 87 m/s

b. 27 m/s y 50 m/s

c. 10 m/s y 41 m/s

d. 40 m/s y 74 m/s

2. Un anciano de 85 años, sale de su casa y camina sobre la acera de la calle hasta la orilla de una carretera que se encuentra a 85 metros, durante un tiempo de 5 minutos y espera 2 minutos para poder pasar, demora 60 segundos en cruzar la calle que mide 5 metros. ¿Cuánto fue la velocidad media del anciano?

a. $4.98x10^{-3}$ m/s

b. $5.98x10^{-3}$ m/s

c. $1.98x10^{-3}$ m/s

d. $7.98x10^{-3}$ m/s

3. Un automóvil se mueve con velocidad de 30.0 m/s y desea adelantar otro que se encuentra 10 metros delante, y se mueve a la misma velocidad ¿Cuánto tiempo le tarda adelantar si acelera a razón de 2.0 m/s^2?

a. 0.32 s

b. 5.02 s

c. 3.02 s

d. 1.54 s

4. Un avión necesita despejar de un portaviones que tiene una pista de 560 m, si avanza desde el reposo ¿Cuánto tiempo le tarda en despegar si acelera a razón de 4.5m/s^2?

a. 15.78 s

b. 47.58 s

c. 54.98 s

d. 10.21 s

5. Un autobús que se mueve con velocidad constante de 30.0 m/s durante 40.0 s, cuando de repente presiona los frenos y desacelera a razón de 3.0 m/s^2 durante 2 s. ¿Qué distancia recorre mientas aplicó los frenos?

a. 1200 m

b. 5412 m

c. 4802 m

d. 1254 m

6. Una moneda es lanzada verticalmente desde el suelo y tarda 5.0 segundos en alcanzar su altura máxima y regresar al suelo. ¿La altura máxima que alcanzó la moneda fue?

a. 30.62 m

b. 52.23 m

c. 12.20 m

d. 20.54 m

7. Una persona deja caer una piedra desde la azotea de un edificio de 30 m y demora 6 s en llegar al suelo. ¿Cuánto es la velocidad de llegada de la piedra?

a. 53.2 m/s

b. 50.1 m/s

c. 48.7 m/s

d. 58.8 m/s

8. Una flecha es lanzada verticalmente hacia arriba por un arquero desde la cima de una montaña que tiene 25 m de alto, si la flecha sale con una velocidad de 20 m/s. ¿Cuánto tiempo le tarda en llegar a la base de la montaña?

a. 4.71 s

b. 3.39 s

c. 10.2 s

d. 2.32 s

9. Una flecha es lanzada por un arquero con un ángulo de 28° sobre la horizontal con una velocidad de 30 m/s, después de un tiempo la flecha cae al suelo. ¿Cuánto tiempo tarda en llegar al suelo?

a. 5.64 s

b. 1.24 s

c. 5.74 s

d. 2.87 s

10. Un futbolista golpea un balón con una velocidad de 35.0 m/s formando un ángulo de 40.0° respecto a la horizontal. ¿Cuál será la altura máxima que alcanza la pelota?

a. 20.54 m

b. 14.23 m

c. 10.51 m

d. 25.56 m

11. 11. Una persona lanza una pelota de tenis desde la cima de un acantilado de 40.0 m de profundidad, con un ángulo de 60.0° y una velocidad de 35.0 m/s. ¿Cuánto es el alcance máximo horizontal?

a. 100.2 m

b. 212.3 m

c. 127.5 m

d. 321.3 m

12. Suponga que alguien lanza una piedra desde la azotea de un edificio, con un ángulo de 45° y una velocidad de 20.0 m/s. si la altura del edificio es de 35.0 m. ¿Cuál es el alcance máximo horizontal que alcanza la pelota?

a. 9.43 m

b. 1.54 m

c. 7.65 m

d. 8.54 m

13. La hélice de un helicóptero tiene aproximadamente 3.0 m de longitud, si gira a una velocidad lineal de 34m/s. ¿Cuál es su velocidad angular?

a. 12.33 rad/s

b. 10.33 rad/s

c. 11.33 rad/s

d. 14.33 rad/s

14. La tierra tiene 6380 km de radio y gira sobre su propio eje con un periodo de 24 h. ¿Cuál es la aceleración radial de la tierra?

a. 3124.2 m/s^2

b. 1423.1 m/s^2

c. 2004.6 m/s^2

d. 2915.2 m/s^2

15. Una rueda de la fortuna de 10 m de radio, de cierta feria de atracciones mecánicas, gira con una velocidad lineal de 5.0 m/s. ¿Cuál es la magnitud y dirección de la aceleración angular de una persona que se encuentra en la parte inferior de la rueda?

a. 1.2 m/s^2

b. 2.8 m/s^2

c. 2.5 m/s^2

d. 1.9 m/s^2

Capítulo 3

Dinámica

En el capítulo anterior se analizaron los diferentes movimientos que pueden tener los cuerpos, teniendo en cuenta los ejes "x" e "y". En este capítulo se presentarán algunas de las fuerzas que generan esos movimientos, las cuales vienen descritas mediante las leyes de Newton. En este capítulo se analizarán algunas de las fuerzas que actúan sobre los cuerpos para ponerlos en movimiento, estas fuerzas están presente en la vida cotidiana y se pueden ilustrar por medio de las leyes del movimiento de Newton. Luego, se enunciarán las 3 leyes del movimiento y luego se profundizará en cada una de ellas.

Concepto de Fuerza: Es aquella que causa o modifica el movimiento de los cuerpos. Su unidad de medida es el NEWTON (N) y su fórmula $N = Kg.m/s^2$. Cuando una fuerza actúa sobre un cuerpo se puede producir alguna de las siguientes situaciones: Cambios en la dirección del movimiento, deformaciones en algún objeto, equilibrio o pérdida del equilibrio [1].

Concepto de peso: La fuerza gravitacional conocida como peso, es una fuerza que los cuerpos experimentan debido a su masa y aceleración con que la tierra atrae a los cuerpos (gravedad), el peso de un cuerpo se puede calcular como el producto entre la masa y la gravedad. Es decir, $W = mg$.

Fuerza Normal: La fuerza normal es una fuerza que ejerce el piso o superficie donde reposa el cuerpo o sistema en estudio. La fuerza Normal siempre se ubicará perpendicular a la superficie donde se ubique el cuerpo. Tenga en cuenta que la normal no siempre es igual o toma el valor del peso.

Fuerza de Fricción: La fricción es una fuerza que siempre se opone al movimiento del cuerpo. Es una fuerza que está directamente relacionada con el peso del cuerpo a través del cálculo de la normal, y también se relaciona con el coeficiente de fricción (μ). La fricción puede ser de carácter estático o cinético. Siendo la fricción estática mayor que la cinética $f_s >> f_k$.

Fuerzas de Contacto: Son fuerzas que se presentan cuando se da un contacto entre el cuerpo que aplica la fuerza que la recibe y así generar cambio en el movimiento del cuerpo. Por ejemplo: Normal, Peso, Tensión, fricción, fuerza elástica.

Fuerzas de no Contacto: Son fuerzas que no necesita de que el cuerpo que ejecuta la acción sobre el sistema esté realizando un tipo de contacto. Por ejemplo: Fuerza gravitacional, Fuerza eléctrica, Fuerza nuclear.

Concepto de Fuerza Neta: Es la fuerza que mueve finalmente al sistema. Su cálculo resulta de la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre el sistema. Una situación donde se muestra la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo es la Fig. 3.1, la cual ilustra fuerzas ejercidas por dos personas sobre una caja y las respectivas sumatorias de fuerzas.

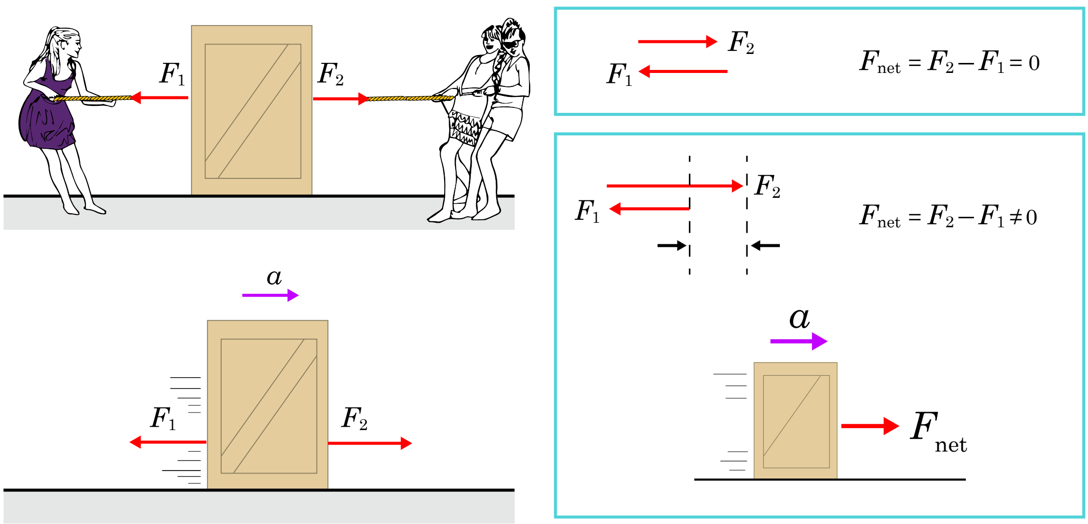


Fig. 3.1. Fuerza Neta actuando sobre una caja.

I. Leyes de Newton

Primera Ley de Newton: Todo cuerpo tiende a permanecer en reposo o a moverse con velocidad constante, siempre y cuando no existan fuerzas externas actuando sobre él [1]. Es decir (ecuación 3.1).

$$\sum \vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{0} \tag{3.1}$$

Segunda Ley de Newton: Siempre que una fuerza externa actúe sobre un cuerpo se produce una aceleración en la dirección de la Fuerza, esta aceleración es directamente proporcional la fuerza aplicada e inversamente proporcional a la masa del cuerpo [1]. Esto es (ecuación 3.2).

$$\sum \vec{F} = ma \tag{3.2}$$

Tercera Ley de Newton: Cuando una fuerza actúa sobre un cuerpo, este reacciona con una fuerza de igual magnitud, pero en sentido contrario (ecuación 3.3) [1].

$$\vec{F}_{AB} = \vec{F}_{BA} \tag{3.3}$$

II. Diagramas de Cuerpo Libre (DCL)

Es un diagrama donde se representan las fuerzas que actúan sobre un determinado cuerpo. No se presentan las fuerzas que el cuerpo aplica sobre cuerpos externos. Además, nos ayuda a ilustrar la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo y a obtener las ecuaciones del movimiento. Un ejemplo de un DCL es la situación ilustrada en la Fig. 3.2 donde se muestra una persona jalando una caja.

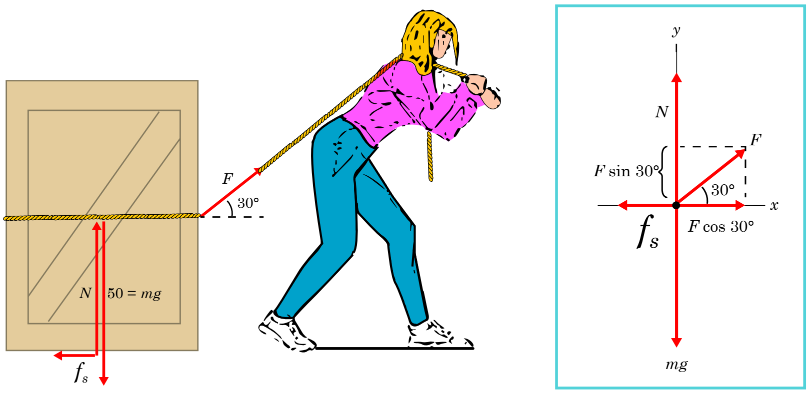


Fig. 3.2. Diagrama de cuerpo libre de una caja jalada.

El objetivo de la utilización de los DCL es obtener una visualización de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, ubicando la dirección y observando las componentes de las respectivas fuerzas. Para situaciones donde intervienen dos o más cuerpos se sugiere un DCL para cada cuerpo [2].

III. 1ra Ley de Newton

También conocida como la ley de la inercia por su enunciado: "Todo cuerpo tiende a permanecer en reposo o a moverse con velocidad constante, siempre y cuando no existan fuerzas externas actuando sobre él". Donde la inercia viene dada como una medida de la cantidad de masa que posee un cuerpo. Es decir, cuanta más masa posea un cuerpo, más inercia tendrá. Por lo que entre más masa tenga un cuerpo es más difícil detenerlo o ponerlo en movimiento.

La primera ley de Newton hace referencia tanto al equilibrio traslacional y rotacional. En esta sección se tratará el caso del equilibrio traslacional, es decir, $\sum \vec{F} = 0$. El caso del equilibrio rotacional será analizado en el Capítulo 6.

El equilibrio traslacional se presenta cuando sobre un cuerpo actúan fuerzas que ocurren en un solo punto y al actuar sobre el sistema sus sumatorias algebraicas es cero. Tanto la sumatoria de fuerzas en el x como en el eje y iguales a cero (ecuación 3.4) [6].

$$\sum \vec{F}_x = 0 \qquad \sum \vec{F}_y = 0 \tag{3.4}$$

Un ejemplo de esto es cuando varias fuerzas actúan sobre un cuerpo de tal modo que, se mantiene en reposo o en movimiento con velocidad constante. Tal como se muestra en la siguiente Fig. 3.3.

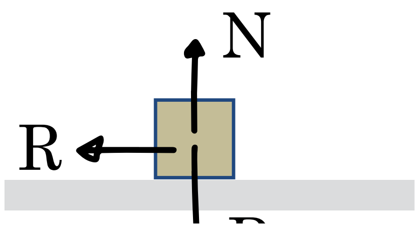


Fig. 3.3. Fuerzas actuando sobre un cuerpo.

Ejemplo 3.1

En la Fig. 3.4, el motor de un automóvil tiene un peso de 30.0 N y se ha colgado de una cadena, que se encuentra unida a otras dos, por medio de un anillo *O*, una sujeta al techo formando una inclinación y la otra unida a la pared. Encuentre las tensiones que soportan el motor.

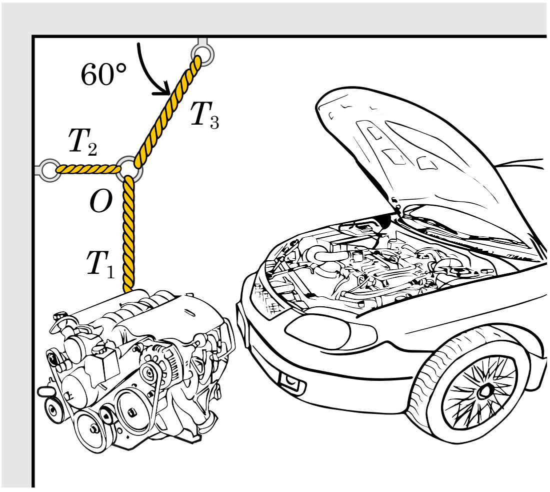


Fig. 3.4. Motor colgando de un juego de cadenas.

• *Solución*

Para obtener las tensiones se deben obtener primero las ecuaciones del movimiento, para esto, realizamos el diagrama de cuerpo libre del anillo que une las 3 tensiones. Esto es (Fig. 3.5).

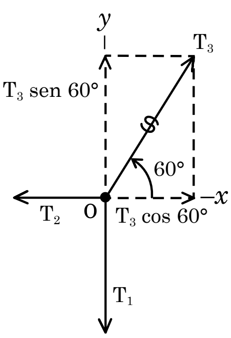


Fig. 3.5. Diagrama de cuerpo libre para las tensiones generadas.

Del diagrama de cuerpo libre se realizan las sumatorias de las fuerzas en "*x*" e "*y*", quedando de la siguiente forma.

$$\sum \vec{F}_x = T_3 cos\ 60° - T_2 = 0$$
$$\sum \vec{F}_y = T_3 sen\ 60° - T_1 = 0$$

Donde T_1 es el peso del motor sostenido. De este modo, $T_1 = 30N$. De aquí se puede obtener T_3 de la segunda ecuación.

$$T_3 = \frac{T_1}{sen\ (60°)} = \frac{30\ N}{sen\ (60°)} = 34.64\ N$$

Con el valor de T_3, calculamos el valor de $T_{2:}$

$$T_2 = T_3 \cos 60° = 34.64\ N \cos(60°) = 17.32\ N$$

IV. 2da ley de Newton

También conocida como ley de la proporcionalidad. Si el sistema no está equilibrado es porque la sumatoria de fuerzas es diferente de cero, generando una aceleración proporcional a su fuerza neta e inversamente proporcional a su masa (ecuación 3.5) [3].

$$\sum \vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{ma} \tag{3.5}$$

Es decir, si se mantiene la misma fuerza neta, pero se aumenta la masa se presentará una disminución de la aceleración del sistema. Otro caso que puede presentarse relaciona al aumento de la aceleración si la fuerza neta aumenta manteniendo la misma masa en el sistema. Tenga presente que vectorialmente la fuerza neta y la aceleración tienen la misma dirección.

Por medio de la segunda ley de Newton, es posible obtener la aceleración de un cuerpo o un sistema, conociendo las fuerzas que están actuando sobre dicho cuerpo o sistema. Esto es de vital importancia, ya que si se conoce la aceleración de un sistema es posible obtener su posición y velocidad, utilizando las ecuaciones de cinemática.

Ejemplo 3.2

Un velero de 3.0 kg, para hielo descansa sobre una superficie horizontal con coeficiente de fricción cinético de 0,1. Se le aplica una fuerza constante de 20.0 N en la dirección de los patines del trineo (Fig. 3.6). Encuentre la aceleración del velero.

Fig. 3.6. Velero moviéndose sobre una superficie horizontal sin coeficiente de fricción.

- *Solución*

Para obtener la aceleración del velero realizamos un diagrama de cuerpo libre para el velero (Fig. 3.7).

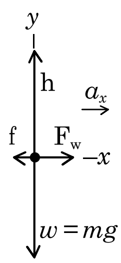


Fig. 3.7. Diagrama de cuerpo libre para el velero.

Del diagrama de cuerpo libre obtenemos las ecuaciones del movimiento, haciendo sumatorias de fuerzas en "x" e "y".

$$\sum \vec{F}_x = F_w - f = ma_x$$
$$\sum \vec{F}_y = n - w = 0$$

Note que la sumatoria de fuerzas en y es igual a cero, puesto que el movimiento se da en el eje x. recuerde que la fuerza de fricción f, es $f = \mu_k N$. Así $f = 0.1(29.4N)$, observe que $N = w$.

Con la fuerza de fricción obtenida, la fuerza horizontal y la masa del velero se puede obtener la aceleración, despejando a_x, obtenemos.

$$a_x = \frac{F_w - f}{m} = \frac{20.0\,N - 2.94\,N}{3.0\,kg} = 5.69\,m/s^2$$

V. Dinamica del Movimiento Circular

Por la segunda ley sabemos que $\sum \vec{F} = ma$, sí aplicamos al movimiento circular descrito por una partícula o un cuerpo, se debe tener en cuenta que (ecuación 3.6):

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{rad} = \vec{\boldsymbol{v}}^2/\boldsymbol{r} \qquad (3.6)$$

De este modo quedaría la segunda ley así (ecuación 3.7):

$$\sum \vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{m}\frac{\vec{\boldsymbol{v}}^2}{\boldsymbol{r}} \qquad (3.7)$$

Cabe resaltar que la velocidad en este tipo de movimiento sigue siendo tangencial a la trayectoria como se muestra en la Fig. 3.8.

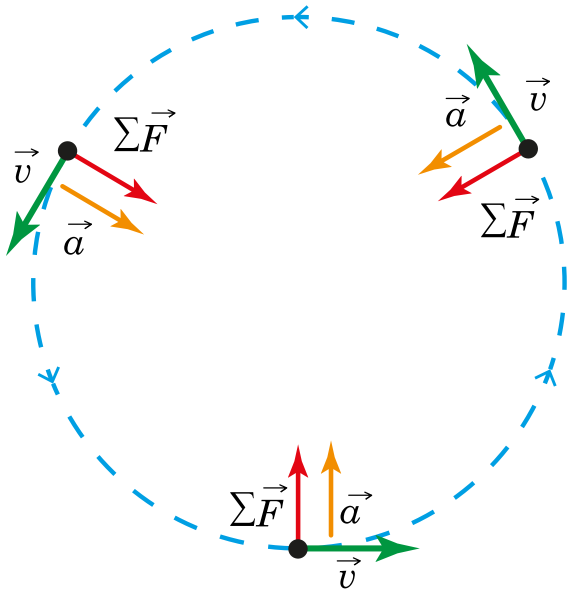


Fig. 3.8. Vectores fuerza, aceleración y velocidad en el movimiento circular.

A. *Fuerza Centripeta*

La fuerza centripeta es una fuerza que se presenta en el movimiento circular, dicha fuerza siempre va dirigida hacia el centro dirigida hacia el centro de la circunferencia y es la causante de mantener el movimiento circular [4].

De acuerdo con la segunda ley de Newton, la magnitud de la fuerza centripeta es igual al producto entre la masa y la aceleracion centripeta. Pero en este caso se debe tener presente que la expresión de fuerza en un movimiento circular varía dependiendo de si es uniforme o uniformemente acelerado.

En el caso del movimiento cicular uniforme (ecuación 3.8).

$$\boldsymbol{F_c = ma_c = \frac{mv^2}{R} = mw^2R} \tag{3.8}$$

Donde m es la masa de un objeto, w es la velocidad angular y R es el radio de la circunferencia.

Para el caso de Movimiento circular uniforme acelerado, se tiene (ecuación 3.9):

$$F = ma = mR\alpha \tag{3.9}$$

Donde m es la masa de un objeto, a es la aceleración ángular y R es el radio de la circunferencia.

Ejemplo 3.3

Un carrito de juguete con masa de 0.5 kg viaja con rapidez constante de 12.0 m/s en el interior de una pista circular vertical de radio de 5.0 m (Fig. 3.9). Encuentre la fuerza normal y la aceleración centrípeta en los puntos superior e inferior de la pista.

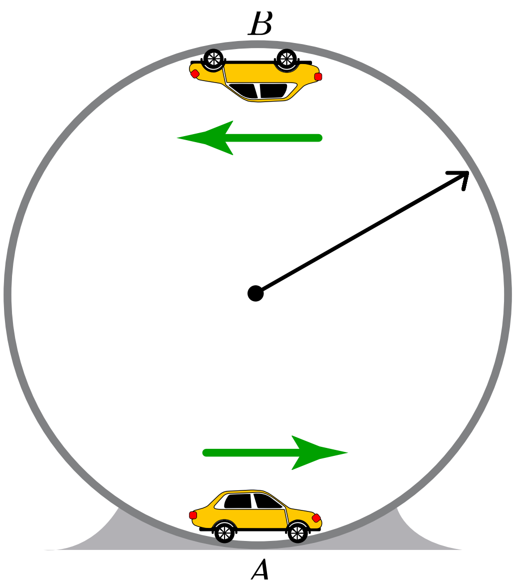


Fig. 3.9. Movimiento circular efectuado por un vehículo en una pista.

• *Solución*

Para encontrar la aceración centrípeta utilizamos la ecuación 3.8, donde v = 12 m/s y r = 5.0 m.

Sustituyendo obtenemos:

$$a_C = \vec{v}^2/r = \frac{(12\ m/s)^2}{5\ m} = 28.8 m/s^2$$

Mientras que para encontrar la normal se realiza sumatoria de fuerzas en ambos puntos y se igualan a la masa por la aceleración centrípeta, tal como se muestra en la ecuación 3.9.

Tenga en cuenta que las fueras que actúan sobre el carrito son la fuerza normal y el peso, y en la parte superior estas tienen la misma dirección, por lo tanto.

$$\sum \vec{F} = ma_C$$

$$N + mg = ma_C$$

$$N = 0.5kg(28.8m/s^2) - 0.5\,kg(9.8\,m/s^2) = 9.5\,N$$

Para calcular la normal en la parte inferior, tenga en cuenta ahora dichas fuerzas tienen direcciones opuestas. Quedando las ecuaciones de la siguiente forma.

$$N - mg = ma_C$$

$$N = 0.5kg(28.8m/s^2) + 0.5\,kg(9.8\,m/s^2) = 19.4\,N$$

VI. 3ra Ley de Newton

Cuando una fuerza actúa sobre un cuerpo, este reacciona con una fuerza de igual magnitud, pero en sentido contrario (ecuación 3.10).

$$\vec{F}_{AB} = \vec{F}_{BA} \qquad (3.10)$$

La tercera ley de Newton nos ilustra en la forma como reacciona un cuerpo cuando experimenta una fuerza actuando sobre él, incluso cuando una fuerza no es de contacto, esta fuerza de reacción es constituida como pareja acción-reacción a la fuerza que la produce, tal como se ilustra en la Fig. 3.10.

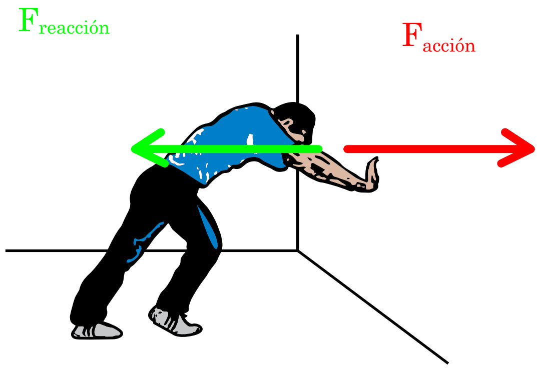


Fig. 3.10. Fuerzas pares Acción-Reacción.

Cada vez que actúa una fuerza, de contacto o no contacto, sobre un cuerpo, este responde con una fuerza de igual magnitud, pero en sentido contrario, estas fuerzas no siempre son representadas sobre los DCL, donde cabe destacar que el peso y la normal no son parejas de acción-reacción. Siendo que el peso es producido por el centro del planeta. Mientras, la normal es producido por la superficie.

Preguntas

P1. ¿Por qué se dice que el movimiento es relativo?

P2. ¿La fuerza normal siempre tiene la misma dirección?

P3. Considere un objeto que se mueve con velocidad constante, el cual se somete a una fuerza de fricción, la cual retrasa el movimiento. ¿Cómo sería la gráfica de la velocidad del objeto en función del tiempo?

P4. Considere un bloque de masa m el cual es jalado por una fuerza F. La segunda ley de Newton manifiesta que esta fuerza produce un movimiento acelerado, si se aumenta la masa el doble. ¿En qué factor hay que aumentar la fuerza para que se siga moviendo con la misma aceleración?

P5. Un bloque que se mueve con aceleración constante ascendiendo por un plano inclinado, al empezar a ascender empieza a desacelerar. Explique de manera clara porque sucede esto.

P6. Dos bloques unidos por una cuerda se mueven por el efecto de jalar el primer cuerpo con una fuerza F: ¿Es posible considerar que los dos cuerpos se mueven con la misma aceleración? ¿En qué condiciones?

P7. Cuando un bloque que desliza por un plano inclinado, sin fricción su aceleración depende de la masa del bloque o de la inclinación del plano. Muestre los cálculos que justifican su respuesta.

P8. ¿La fuerza normal en el movimiento circular cambia o siempre permanece igual?

P9. Considere un movimiento circular donde se generan la aceleración radial y tangencial. Explique la diferencia entre estas.

P10. ¿Son la normal y el peso, pares de fuerzas Acción-Reacción?

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Considere la Fig. 3.11 donde un peso de 600 N es soportado por dos cuerdas en diferentes direcciones. ¿Cuál es el valor de las tensiones F_{T1} y F_{T2}?

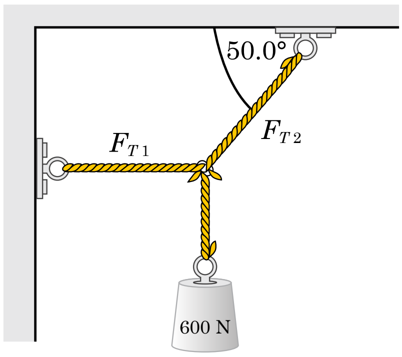


Fig. 3.11. Cuerdas sosteniendo un peso de 600 N.

a. 503.45 N; 783.24 N

b. 213.24 N; 458.21 N

c. 741.21 N; 145.87 N

d. 654.23 N; 152.65 N

2. La caja de la Fig. 3.12 está sostenida por una cuerda sobre un plano inclinado 15°, si la masa de la caja es de 3.0 kg ¿Cuánto es la tensión que sostiene la caja?

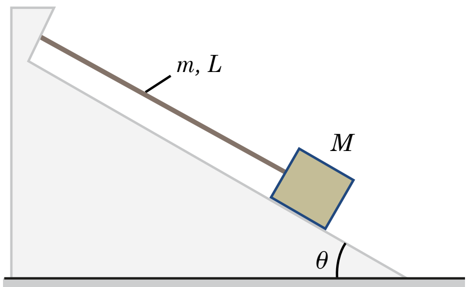


Fig. 3.12. Caja de madera sostenida por una cuerda, sobre un plano inclinado.

a. 8.60 N

b. 5.60 N

c. 7.60 N

d. 3.60 N

3. En un laboratorio un estudiante pretende calcular el coeficiente de fricción haciendo que el sistema se mueva con rapidez constante, como muestra el montaje de la Fig. 3.13, donde las masas de los bloques A y B son 5.0 kg y 3.0 kg respectivamente, el valor del coeficiente de fricción es:

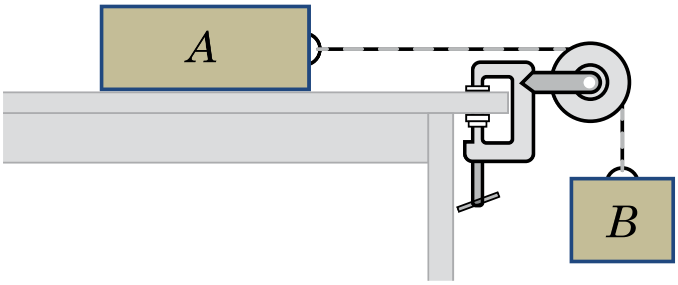


Fig. 3.13. Sistema de dos cuerpos unidos por una cuerda.

a. 0.3

b. 0.5

c. 0.6

d. d) 0.2

4. Encuentre la aceleración generada sobre un cuerpo que tiene 3.0 kg de masa que se encuentra sobre una superficie horizontal y es jalado por una fuerza de 20.0 N paralela a la superficie

a. 5.87 m/s^2

b. 3.45 m/s^2

c. 4.54 m/s^2

d. 6.67 m/s^2

5. Durante un juego de fútbol soccer, una pelota con masa de 0.25 kg, que está inicialmente en reposo, es pateada por un jugador y sale disparada a 23.0 m/s. sí el contacto del jugador con la pelota duró 6.0×10^{-3} s, ¿cuál fue la fuerza promedio ejercida sobre la pelota?

a. 789.23 N

b. 958.33 N

c. 321.12 N

d. 546.32 N

6. Sí la caja del ejercicio 2 posee una masa de 5 kg y es jalada por la cuerda con una fuerza constante de 30 N ¿Cuál es el valor de la aceleración mientras asciende por el plano inclinado?

a. 2.32 m/s^2

b. 4.54 m/s^2

c. 1.25 m/s^2

d. 2.53 m/s^2

7. Considere el ejercicio anterior con un coeficiente de rozamiento entre la caja y la superficie de 0.3, ¿Cuál es la nueva aceleración de la caja?

a. 0.62 m/s^2

b. 0.54 m/s^2

c. 1.25 m/s^2

d. 3.21 m/s^2

8. En la Fig. 3.14 se muestran dos cajas unidas por medio de una cuerda que pasa por una polea sin fricción y de masa despreciable, sí la masa del Bloque A es de 10 kg y existe un coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie de 0.1 y la masa del bloque B es 5kg. ¿Con que aceleración se mueve el sistema?

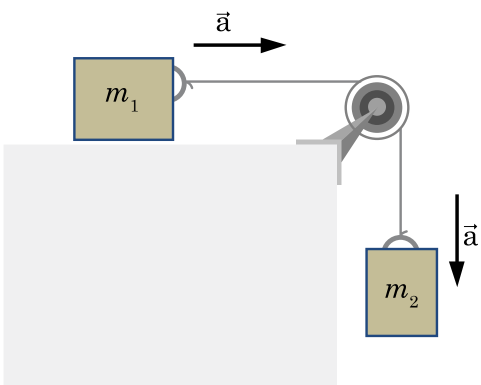


Fig. 3.14. Sistema de dos cuerpos con fricción unidos por una cuerda.

a. 3.21 m/s²

b. 2.98 m/s²

c. 2.61 m/s²

d. 3.32 m/s²

9. La Fig. 3.15 muestra tres bloques conectados por dos cuerdas sin masa que pasan por poleas sin fricción, suponga que no hay fricción entre los bloques y la superficie ¿hacia dónde se mueve el sistema y cuanto es la aceleración?

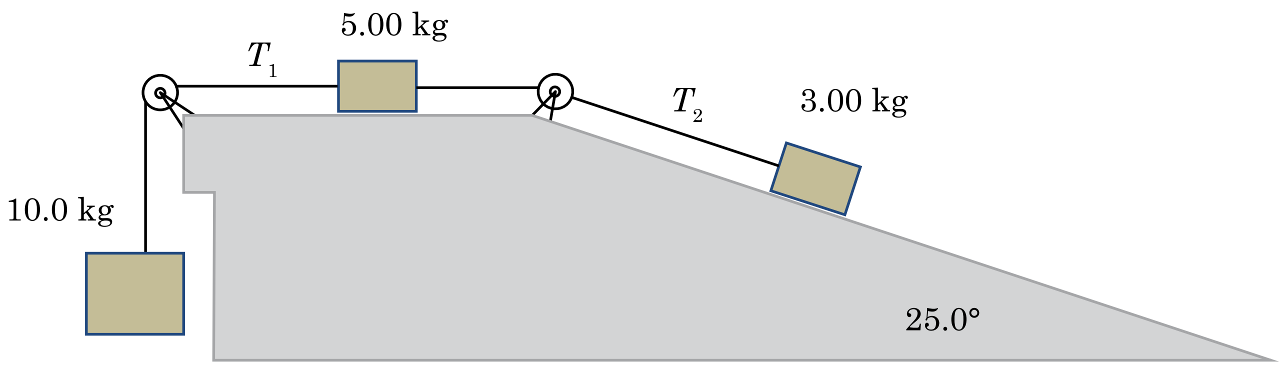


Fig. 3.15. Sistema de tres cuerpos sobre plano inclinado y horizontal.

a. 5.74 m/s² hacia la derecha

b. 4.75 m/s² hacia la izquierda

c. 3.25 m/s² hacia la derecha

d. 6.00 m/s² hacia la izquierda

10. Una persona golpea una pared con un martillo con una fuerza de 40 N. Sin embargo, el martillo no golpea completamente perpendicular a la pared sino inclinado 10° por debajo de la horizontal. ¿Cuánto es la fuerza que aplica la pared sobre el martillo?

a. 39.4 N

b. 40.3 N

c. 40.0 N

d. 20.2 N

11. Un carro de 500 kg de masa es empujado por un camión que tiene 4500 kg de masa, en dirección este, sobre una carretera lisa y sin fricción, si el camión empuja el carro con una fuerza de 1000N ¿Cuánto es la fuerza que el carro ejerce sobre el camión?

a. 1000 N

b. -1000 N

c. 2000 N

d. -2000 N

12. La Fig. 3.16 muestra dos masas unidas por una cuerda, que pasan por una polea de masa despreciable y sin fricción, considere el valor de las masas m_1= 5 kg y m_2= 3 kg como se muestran en la figura y encuentre la aceleración con que se mueve el sistema.

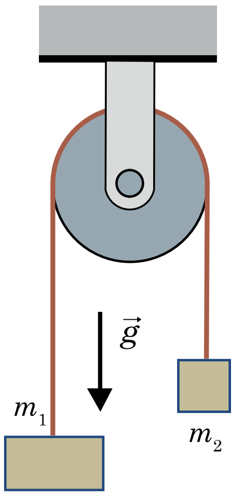


Fig. 3.16. Máquina de Atwood.

a. 3.87 m/s^2

b. 4.50 m/s^2

c. 1.25 m/s^2

d. 2.45 m/s^2

13. Dos bloques con masas m_1 y m_2, se unen por medio de una cuerda ligera y sin masa, el bloque 1 se encuentra sobre un plano inclinado 30° y tiene una masa de 6 kg, mientras que el bloque 2 tiene una masa de 8 kg y cuelga de la cuerda, como se muestra en la Fig. 3.17. Suponga que no existe rozamiento entre el bloque 1 y la superficie. ¿Cuál será la aceleración del sistema?

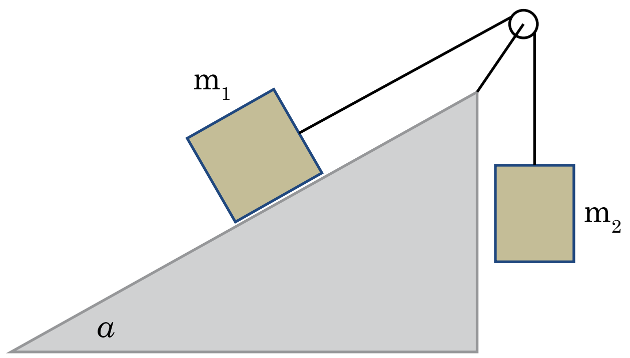


Fig. 3.17. Dos bloques unidos por una cuerda, uno de ellos sobre un plano inclinado y el otro colgando.

a. 3.50 m/s^2

b. 4.21 m/s^2

c. 2.12 m/s^2

d. 3.46 m/s^2

14. Considere el ejercicio 13 con las mismas masas e igual inclinación sobre el plano, pero ahora con un rozamiento entre el bloque 1 y la superficie de 0.2. ¿Cuál será el nuevo valor de la aceleración?

a. 1.24 m/s^2

b. 3.50 m/s^2

c. 2.77 m/s^2

d. 1.54 m/s^2

15. **15.** En el sistema mostrado en la Fig. 3.18, las masas son iguales y la inclinación en el lado izquierdo y derecho son 45° y 50° respectivamente, suponga que no hay fricción ¿Cuánto es el valor de la aceleración del sistema?

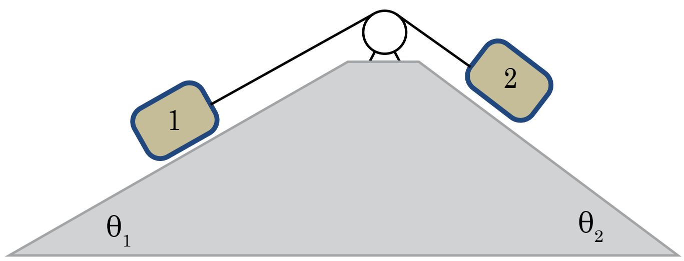


Fig. 3.18. Bloques unidos por una cuerda, ambos sobre planos inclinados.

a. 0.32 m/s^2

b. 0.29 m/s^2

c. 2.10 m/s^2

d. 1.98 m/s^2

Trabajo y Energía

Después de revisar las leyes de Newton y sus diversas aplicaciones, pasamos a estudiar lo que ocurre al aplicar una fuerza sobre un objeto y producirle un movimiento. En el proceso hay mucho más que un simple desplazamiento, hay en el proceso una transferencia de una cantidad física llamada energía, y al proceso mediante el cual se transfiere energía de un medio externo hacia el bloque que se mueve se denomina trabajo. Se mencionan las energías de tipo mecánico y no mecánico, como la energía mecánica disipada en forma de energía térmica. Se establece el teorema del trabajo y la energía cinética y a partir de ahí se llega al principio de conservación de la energía. Se clasifican las fuerzas como de tipo conservativo y no conservativo asociando energía potencial al trabajo realizado por aquellas fuerzas de tipo conservativo. En el desarrollo del tema se van presentando diversas aplicaciones de estos teoremas para analizar el comportamiento de sistemas que encontramos en nuestro diario vivir.

I. Trabajo realizado por una Fuerza con Magnitud Constante

Consideremos un bloque en reposo sobre el cual se aplica una única fuerza $\vec{F}$ constante la cual le producirá un desplazamiento $\Delta\vec{x}$ en la dirección de la fuerza [3].

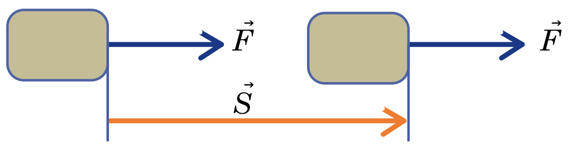


Fig. 4.1. Trabajo realizado por una Fuerza Constante.

En esta circunstancia se dice que la fuerza $\vec{F}$ realiza un trabajo W_F sobre el bloque que se desplaza. Este trabajo es una cantidad física escalar que se define matemáticamente como (ecuación 4.1):

$$\boldsymbol{W_F = F\Delta\vec{x}} \tag{4.1}$$

Puede observarse que las unidades de trabajo vienen siendo unidad de fuerza por unidad de longitud, es decir $N \cdot m$. A esta combinación de unidades se le denomina Julio y se representa con la letra J.

De manera semejante podemos comparar el caso anterior con la situación en la cual una persona empuja a una caja a la largo de un piso horizontal. Se dice entonces que la persona realiza un trabajo sobre la caja que está empujando. Se sabe que, sobre la caja, además de experimentar la fuerza aplicada por la persona, también está recibiendo otras fuerzas como el peso que ejerce la Tierra sobre él, y la fuerza normal y de fricción cinética por parte del suelo. La situación se muestra en el siguiente diagrama (Fig. 4.2) de Cuerpo Libre para el carro:

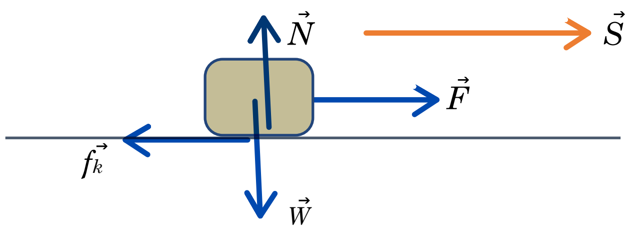


Fig. 4.2. Trabajo Neto realizado sobre un cuerpo.

En este caso se dice que la normal y el peso no realizan trajo sobre la caja dado que no tienen componente en la dirección del desplazamiento, mientras que para la fuerza de fricción cinética se encuentra que al apuntar en dirección contraria al desplazamiento de la caja se dice que está realizando un trabajo negativo sobre la caja, el cual viene dado por la ecuación 4.2:

$$\boldsymbol{W_f = -f_k}\Delta\vec{x} \tag{4.2}$$

Recordemos que la fuerza de fricción cinética también es $f_k = \mu_k N$.

En general podemos decir que el trabajo neto realizado sobre la caja es la suma del trabajo que realiza cada una de las fuerzas externas que recibe la caja, esto es (ecuación 4.3) [3]:

$$\boldsymbol{W_{neto} = W_F + W_f + W_N + W_g} \tag{4.3}$$

De igual modo podemos pensar que la fuerza a1plicada por la persona sobre la caja pueda tener una inclinación con respecto a la dirección en la cual se desplaza la caja, así como se muestra en la Fig. 4.3.

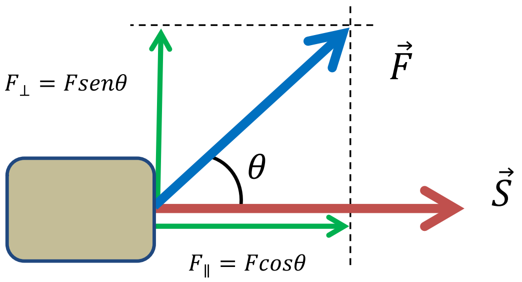


Fig. 4.3. Componentes vectoriales de una fuerza inclinada actuando sobre un cuerpo.

En este caso decimos que solo la componente paralela al desplazamiento realiza trabajo sobre la caja mientras esta se mueve, y el trabajo realizado por esta fuerza es entonces (ecuación 4.4):

$$\boldsymbol{W_F = F_\parallel S = Fcos\theta S} \tag{4.4}$$

Esta expresión puede escribirse en términos del producto punto entre dos vectores como (ecuación 4.5):

$$\boldsymbol{W_F = \vec{F} \cdot \Delta\vec{x} = F\Delta x cos\theta} \tag{4.5}$$

En coordenadas cartesianas este producto es (ecuación 4.6):

$$\boldsymbol{W_F = F_x S_x + F_y S_y} \tag{4.6}$$

Ejemplo 4.1

Un bloque se mueve horizontalmente, por una superficie lisa y sin fricción, cuando se le aplica una fuerza de 30.0 N inclinada 30° respecto al eje x positivo, como muestra la siguiente figura, la masa del bloque es de 2.0 kg (Fig. 4.4) ¿Cuánto trabajo debe realizar la fuerza de 30.0 N para mover el bloque una distancia de 2.5 m?

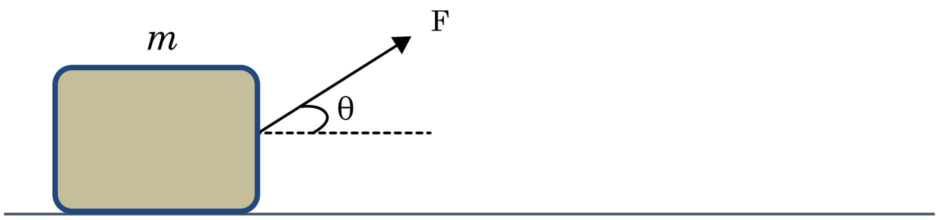


Fig. 4.4. Bloque de masa m jalado por una fuerza F.

- *Solución*

Para encontrar el trabajo necesario para mover el bloque 2.5 m de la posición de inicio, se utiliza la ecuación 4.5, obteniendo lo siguiente:

$$W_F = 30.0\,N(2.5\,m)\cos(30°)$$

$$W_F = 64.95\,Nm$$

Nótese que se ha tenido en cuenta solo la componente paralela al desplazamiento, y que esta es la que realiza trabajo.

II. Trabajo realizado por la Fuerza de Gravedad o Peso (*Wg*)

El peso de un cuerpo lo consideramos constante hasta que no se diga otra cosa. Por otra parte, podemos tener en cuenta que siendo el peso siempre un vector vertical respecto al piso horizontal, se encuentra que el peso no realizará trabajo si el desplazamiento del cuerpo es un desplazamiento horizontal [4].

Veamos que sucede para un desplazamiento vertical (Fig. 4.5):

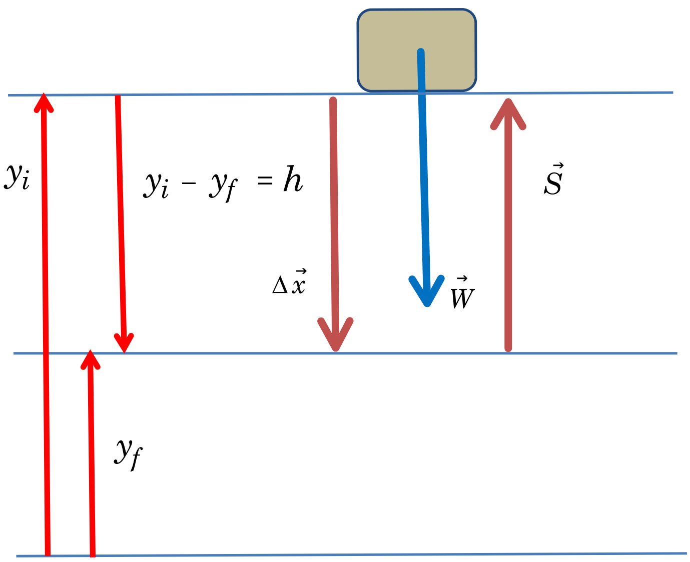


Fig. 4.5. Desplazamiento vertical de un cuerpo y su trabajo.

En la Fig. 4.5 puede verse que si el cuerpo desciende una distancia S entonces la gravedad realiza un trabajo positivo dado que el peso y el desplazamiento tendrían igual dirección, mientras que si el cuerpo sube una distancia S el trabajo realizado por la gravedad sería negativo.

Así el trabajo realizado por la gravedad sería (ecuación 4.7):

$$\boldsymbol{W_g = \pm wh = \pm mgh} \tag{4.7}$$

Donde el signo es el positivo si el cuerpo baja y negativo si el cuerpo sube.

Por otra parte, también puede verse que se puede escribir (ecuación 4.8):

$$\boldsymbol{W_g = mg\left(y_i - y_f\right)} \tag{4.8}$$

Se puede observar que el trabajo realizado por la gravedad solo depende de las posiciones verticales del cuerpo. De igual modo puede escribirse (ecuación 4.9):

$$\boldsymbol{W_g = -\left(mgy_f - mgy_i\right)} \tag{4.9}$$

Definimos ahora una nueva cantidad física, que llamaremos energía, como la capacidad que tiene un cuerpo para realizar trabajo. De esta manera vemos que debido a la altura que el cuerpo tiene puede realizar trabajo al momento de soltarse y chocar con, digamos, un clavo que se encuentra abajo y entonces el bloque realizaría trabajo sobre el clavo al enterrarlo sobre madera, por ejemplo. Esta energía que posee el cuerpo debido a su altura medida respecto a un nivel de referencia que se tome recibe el nombre de energía potencial gravitacional U_g, y se define matemáticamente como (ecuación 4.10) [4]:

$$\boldsymbol{U_g = mgy} \tag{4.10}$$

De esta manera se puede escribir entonces (ecuación 4.11) (ecuación 4.12):

$$\boldsymbol{W_g = -\left(U_{gf} - U_{gi}\right)} \tag{4.11}$$

$$\boldsymbol{W_g = -\Delta U_g} \tag{4.12}$$

Este resultado se obtiene también si el cuerpo se desplaza a lo largo de un plano inclinado, así como se muestra en la Fig. 4.6.

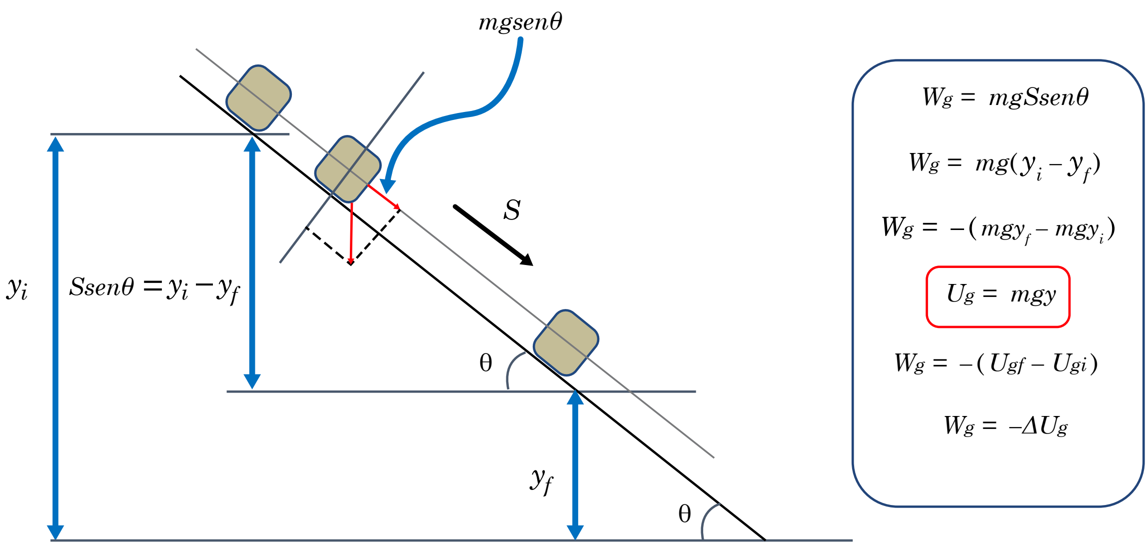


Fig. 4.6. Trabajo realizado por el peso sobre un cuerpo que se desplaza por una pendiente.

Como puede observarse en la ecuación 4.8, el trabajo realizado por la gravedad es cero si la coordenada inicial y final en y coinciden, o si el punto inicial en el recorrido es el mismo punto al final del recorrido, en este caso se dice que el objeto recorrió un camino cerrado.

Ejemplo 4.2

Considere un tanque que contiene ladrillos el cual usted necesita elevar por medio de una cuerda, verticalmente hacia arriba, una distancia de 6.0 m, si la masa del tanque con los ladrillos es de 20.0 kg ¿Qué trabajo necesita realizar sobre el tanque para elevarlo dicha distancia?

- *Solución*

Para obtener el trabajo necesario se recurre a la ecuación 4.9, siendo $y_i = 0$ puesto que se toma como referencia, a partir de allí se toma los 6 metros hacia arriba positivos quedando la ecuación de la siguiente manera.

$$W_g = -(20.0\ kg)\ (9.8\ kg\ m/s^2)\ (6.0\ m)$$

$$W_g = -1176\ Nm$$

Note que el trabajo es negativo debido a que el desplazamiento y la fuerzas tienen direcciones contrarias

III. Fuerzas Conservativas y No Conservativas

Aquellas fuerzas cuyo trabajo realizado sobre un objeto depende exclusivamente de su posición inicial y su posición final reciben el nombre de fuerzas conservativas o no disipativas. Además de la fuerza de la gravedad también es conservativa la fuerza variable debida a un resorte, como lo veremos más adelante.

Por otra parte, también se conocen como fuerzas no conservativas o fuerzas disipativas aquellas fuerzas cuyo trabajo realizado sobre un objeto si depende del camino seguido, o si el camino es cerrado el trabajo es diferente de cero. Ejemplo de este tipo de fuerza es la fuerza de fricción cinética cuyo trabajo realizado al actuar sobre un objeto está dado por la expresión (4.2) en la cual $W_f = -f_k \Delta x$ el factor S representa la longitud del camino seguido.

Puede observarse la diferencia del trabajo realizado por la fricción cinética al ir del punto A al punto B por dos caminos diferentes (ecuación 4.13) (ecuación 4.14) (ecuación 4.15):

$$\boldsymbol{W_f} = -\boldsymbol{f_k}\Delta x \tag{4.13}$$

$$\boldsymbol{W_{f camino\,1}} = -\boldsymbol{f_k 2R} \tag{4.14}$$

$$\boldsymbol{W_{f\ camino\,2}} = -\boldsymbol{f_k \pi R} \tag{4.15}$$

IV. Trabajo realizado por una Fuerza Variable

Para el caso de calcular el trabajo realizado por una fuerza variable, la expresión $W_F = \vec{F} \cdot \Delta\vec{x}$ pasa a ser escrita como (ecuación 4.16) [4]:

$$W_F = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{x} \qquad (4.16)$$

Donde, $\vec{F} \cdot d\vec{x}$ representa el diferencial de trabajo realizado por la fuerza variable al desplazar al objeto una cantidad $d\vec{x}$.

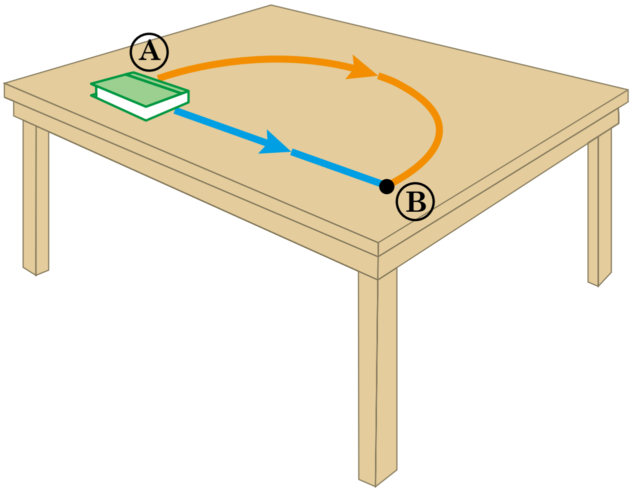


Fig. 4.7. Trayectorias seguidas por un libro desde un punto *A* hasta *B*.

Geométricamente la expresión 4.16 nos está indicando que el trabajo realizado por una fuerza, variable o no, representa al área bajo la curva en el diagrama *Fuerza vs Posición*.

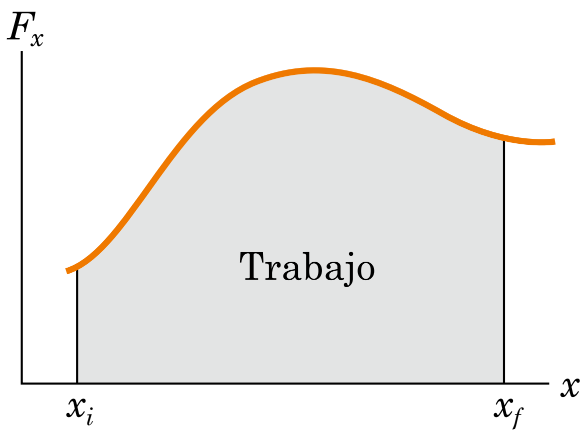


Fig. 4.8. Gráfica de Fuerza vs Posición.

En la gráfica (Fig. 4.8) se muestra que el trabajo realizado por la fuerza al desplazar al objeto queda representado por el valor del área bajo la curva. Por supuesto que, si la curva pasa por debajo del eje x, el trabajo queda siendo negativo.

V. Trabajo realizado por un Resorte

Consideremos un resorte unido por un extremo a la tierra y que es estirado a partir de su posición de equilibrio (Fig. 4.9), la cual es la posición del extremo libre del resorte cuando está en su longitud natural [4].

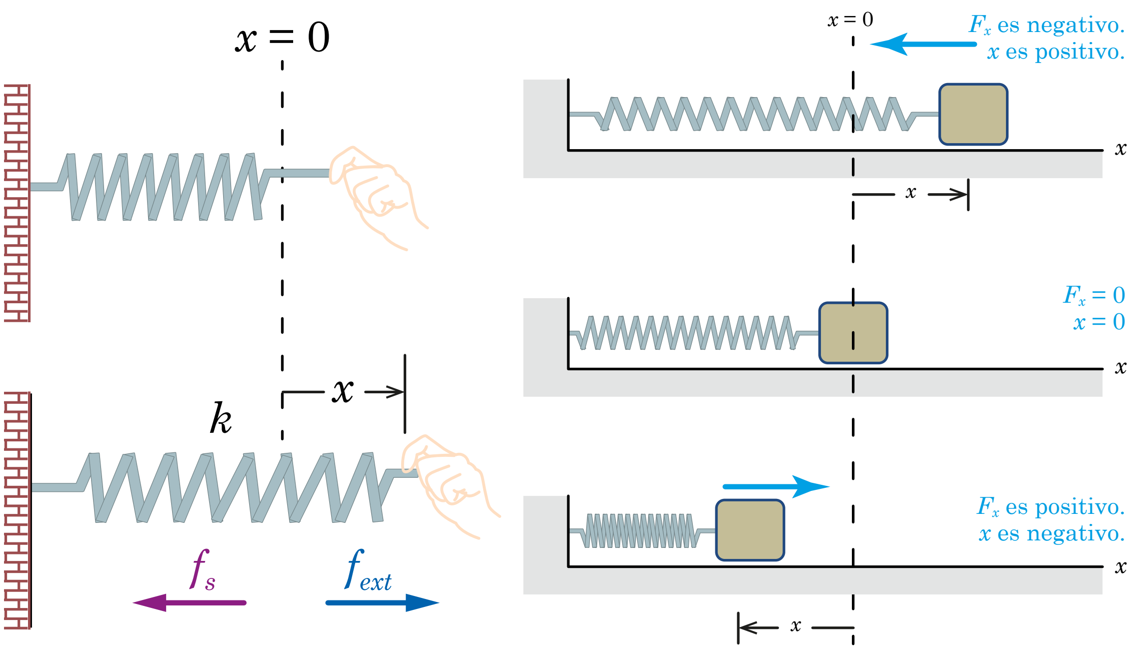


Fig. 4.9. Variación de la posición de un resorte al aplicar una fuerza.

La fuerza ejercida por el resorte sobre el agente que lo estira o comprime viene dada por la expresión

$$F_e = -kx \tag{4.17}$$

Esta ecuación es conocida como Ley de Hooke, en donde:

F_e: Fuerza ejercida por el resorte.

k : Constante de elasticidad, constante de rigidez o constante de restitución. Es una cantidad positiva propia de cada resorte que indica lo rígido o blando que este es. Por ejemplo, si $k = 5.0\ N/m$, quiere decir que dicho resorte requiere de 5.0 N por cada metro que se estire.

x : Representa el estiramiento o compresión del resorte a partir de su posición de equilibrio. En la posición de equilibrio $x = 0$.

– : el signo menos garantiza que la fuerza elástica siempre tiene dirección contraria al estiramiento o compresión del resorte.

De acuerdo con la ecuación (4.16), para calcular el trabajo que realiza la fuerza elástica de un resorte al estirarse o comprimirse desde una posición x_i hasta una posición x_f viene quedando (ecuación 4.18) (ecuación 4.19) (ecuación 4.20) (ecuación 4.21):

$$\boldsymbol{W_e = \int_{x_i}^{x_f} -kx\,dx} \tag{4.18}$$

$$\boldsymbol{W_e = \frac{1}{2}k\left(x_i^2 - x_f^2\right)} \tag{4.19}$$

$$\boldsymbol{W_e = -\frac{1}{2}k\left(x_f^2 - x_i^2\right)} \tag{4.20}$$

$$\boldsymbol{W_e = -\left(\frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2\right)} \tag{4.21}$$

Puede observarse que el trabajo realizado por la fuerza elástica, al igual que el trabajo realizado por la gravedad, depende solo de la posición inicial y la posición final. Por lo tanto, cumple con la condición de ser una fuerza de tipo conservativo [4].

Dado que el resorte al estar comprimido o estirado es capaz de realizar trabajo sobre un bloque que este unido a su extremo libre, podemos decir entonces que este resorte tiene una energía la cual llamaremos energía potencial elástica. La representamos con la notación U_e y la definimos matemáticamente como (ecuación 4.22):

$$U_e = \frac{1}{2}kx^2 \tag{4.22}$$

De esta manera la expresión (4.21) puede escribirse como (ecuación 4.23) (ecuación 4.24):

$$W_e = -\left(U_{ef} - U_{ei}\right) \tag{4.23}$$

$$W_e = -\Delta U_e \tag{4.24}$$

Que nos dice que el trabajo realizado por la fuerza elástica ejercida por un resorte es igual al negativo del cambio en su energía potencial elástica. Puede ilustrarse entonces como sigue en la Fig. 4.10.

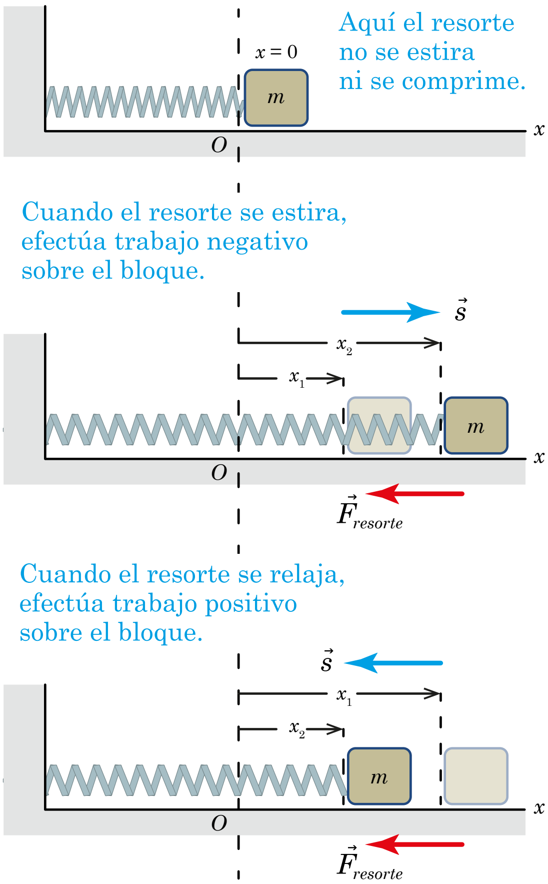


Fig. 4.10. Trabajo realizado por un resorte.

$$W_e = \int_{x_i}^{x_f} -kxdx \tag{4.25}$$

$$W_e = -\left(\frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2\right) \tag{4.26}$$

$$W_e = - \quad U_{ef} - U_{ei} \tag{4.27}$$

$$W_e = -\Delta U_e \tag{4.28}$$

$$W_e = \int_{x_i}^{x_f} -kxdx \tag{4.29}$$

$$W_e = -\left(\frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2\right) \tag{4.30}$$

$$W_e = -\left(U_{ef} - U_{ei}\right) \tag{4.31}$$

$$W_e = -\Delta U_e \tag{4.32}$$

Y la gráfica de fuerza contra desplazamiento queda de la siguiente forma (Fig. 4.11).

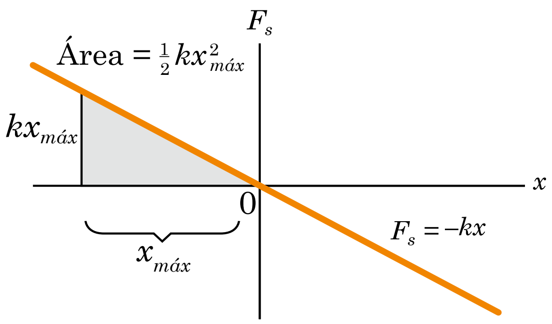


Fig. 4.11. Gráfica de Fuerza vs Posición para un resorte que oscila con respecto a un punto de referencia.

Ejemplo 4.3

Un bloque de 1.5 kg de masa se mueve una distancia de 2.0 m cuando es jalado por un resorte de constante elástica de 200 N/m como se muestra en la siguiente Fig. 4.12, el resorte se estira una distancia de 0.05 m para mover el bloque, si entre el bloque y la superficie existe un coeficiente de rozamiento de 0.2 ¿Cuál es el trabajo neto realizado sobre el bloque?

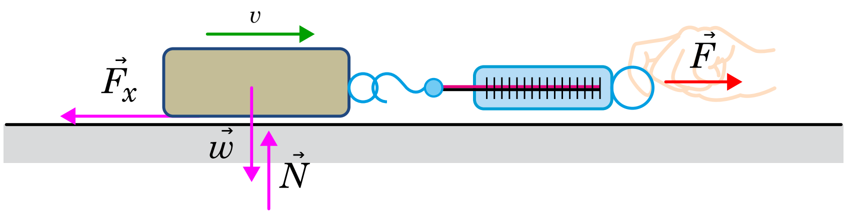


Fig. 4.12. Bloque jalado por un resorte.

• *Solución*

La figura muestra las fuerzas que actúan sobre el bloque cuando es jalado por el resorte. Note que las fuerzas que realizan trabajo sobre el bloque son el resorte y la fuerza de fricción. El trabajo realizado por el peso y la fuerza normal son cero.

Para calcular el trabajo realizado por la fricción recurrimos a la ecuación 4.13.

$$\boldsymbol{W_f = -\mu_k NS}$$

$$\boldsymbol{W_f = -0.2(14.7\ N)2.0\ m}$$

$$\boldsymbol{W_f = -5.88\ Nm}$$

Ahora, para calcular el trabajo realizado por el resorte, utilizamos la ecuación 4.26, siendo $x_0 = 0$.

$$W_e = -\frac{1}{2}(200\ N/m)(0.05\ m)^2$$

$$W_e = -0.25\ Nm$$

Ahora, el trabajo neto será la suma de los trabajos calculados. Por lo tanto:

$$W_{neto} = -6.13\ Nm$$

El signo negativo indica que el trabajo realizado es contrario a la dirección del movimiento.

VI. Teorema del Trabajo y la Energía Cinética

Consideremos a un objeto en reposo sobre el cual se aplica una sola fuerza constante, por lo que el objeto empieza a acelerar uniformemente en la dirección de la fuerza y por lo tanto su desplazamiento también es en la dirección de la única fuerza aplicada, como se muestra en la Fig. 4.13.

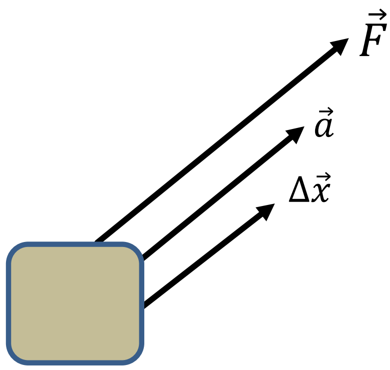


Fig. 4.13. Vectores Desplazamiento, Aceleración y Fuerza actuando sobre un cuerpo en la misma dirección.

Puede verse entonces que el trabajo realizado por esta fuerza constante sobre el objeto puede calcularse por medio de la ecuación (4.1). Pero, como $\vec{F}$ y $\Delta\vec{x}$ tienen la misma dirección, la anterior ecuación se puede escribir en la siguiente forma (ecuación 4.33) [6]:

$$\boldsymbol{W_F} = \boldsymbol{F}\Delta x \tag{4.33}$$

Teniendo en cuenta que la masa del objeto sea m, y teniendo en cuenta la segunda ley de Newton, se puede escribir (ecuación 4.34):

$$\boldsymbol{W_F} = \boldsymbol{ma}\Delta x \tag{4.34}$$

Dado que la aceleración del objeto es uniforme, su movimiento cumple con las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado, en particular con la ecuación (2.6) $v_f^2 = v_i^2 + a\Delta x$

Y despejando al producto $a\Delta x$ se tiene

$$\boldsymbol{a}\Delta x = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{v_f^2} - \boldsymbol{v_i^2}\right) \tag{4.35}$$

Ahora se remplaza este resultado en la ecuación (4.6.2) para obtener el siguiente resultado

$$\boldsymbol{W_F} = \frac{1}{2}\boldsymbol{mv_f^2} - \frac{1}{2}\boldsymbol{mv_i^2} \tag{4.36}$$

Se define ahora una cantidad que denominaremos Energía cinética, simbolizada con la letra K y expresada matemáticamente por

$$\boldsymbol{K} = \frac{1}{2}\boldsymbol{mv^2} \tag{4.37}$$

Esta energía cinética corresponde a la energía que tiene un objeto en virtud de su movimiento, ya que estando en movimiento puede chocar con otro objeto y causarle desplazamiento mientras aplica fuerza sobre él.

Con esta definición la ecuación (4.37) puede escribirse como

$$\boldsymbol{W_F = K_f - K_i} \tag{4.38}$$

$$\boldsymbol{W_F = \Delta K} \tag{4.39}$$

Por otra parte, si sobre el objeto se aplica, no una, sino varias fuerzas, entonces la ecuación (4.6.7) se expresa así.

$$\boldsymbol{W_{neto} = \Delta K} \tag{4.40}$$

Este resultado se conoce como el Teorema del trabajo y la energía cinética y nos indica que el trabajo neto realizado sobre un sistema se puede calcular fácilmente con la diferencia entre la energía cinética final menos la inicial.

Note, que para un objeto que se mueva con rapidez constante, el trabajo neto realizado sobre él será igual a cero, al igual que sí coinciden los valores de la rapidez inicial y final.

Ejemplo 4.4

Suponga que un vehículo de 800 kg se desplaza sobre una carretera recta, lisa y sin fricción, desde el reposo hasta que alcanza una velocidad de 33.3 m/s. ¿Cuánto trabajo realizó el motor para alcanzar dicha velocidad?

- *Solución*

Para encontrar el trabajo total realizado sobre vehículo para incrementar su velocidad desde el reposo hasta 33.3 m/s, utilizamos el teorema del trabajo y la energía cinética, con los valores que se tienen se remplazan en la ecuación (4.36) siendo $v_i = 0$.

$$W_{neto} = \frac{1}{2}(800\ kg)(33.3\ m/s)^2$$

$$W_F = 443556.0\ Nm$$

VII. Energía Mecánica

La energía potencial gravitacional, la energía potencial elástica y la energía cinética son energías denominadas energías de tipo mecánico, y se define la energía mecánica total de un sistema como la suma de estas tres energías que estén presente en un sistema determinado, esto es (ecuación 4.41)[5]:

$$E_m = K + U_g + U_e \tag{4.41}$$

VIII. Teorema de Conservación de la Energía

Las fuerzas pueden ser clasificadas como fuerzas de tipo conservativa (*c*) o no conservativa (*nc*), razón por la que se puede escribir (ecuación 4.22):

$$W_{neto} = W_c + W_{nc} \tag{4.42}$$

Donde $W_c = W_g + W_e + W_{otras}$ y $W_{nc} = W_f + W_{otras}$, de manera que (ecuación 4.43):

$$W_{neto} = W_g + W_e + W_f + W_{otras} \tag{4.43}$$

Teniendo en cuenta la ecuación 4.23 y la ecuación 4.43 se tiene la ecuación 4.44:

$$W_{neto} = -\Delta U_g - \Delta U_e + W_f + W_{otras} \tag{4.44}$$

Remplazando esta expresión en el teorema del trabajo y la energía cinética se encuentra que (ecuación 4.45):

$$-\Delta U_g - \Delta U_e + W_f + W_{otras} = \Delta K \tag{4.45}$$

Lo cual queda como (ecuación 4.46) (ecuación 4.47) (ecuación 4.48):

$$W_f + W_{otras} = \Delta K + \Delta U_g + \Delta U_e \tag{4.46}$$

$$W_f + W_{otras} = \Delta\left(K + U_g + U_e\right) \tag{4.47}$$

$$W_f + W_{otras} = \Delta E_m \tag{4.48}$$

Lo cual nos indica que la energía mecánica total de un sistema experimentará cambios en su valor solo si actúan sobre el sistema fuerzas de fricción cinética y otras fuerzas adicionales a la gravitacional y a la elástica.

El resultado de la ecuación 4.48 se conoce como Teorema de conservación general de la energía y nos dice que la energía no se crea ni se destruye, solo se transforma de un tipo de energía a otros tipos diferentes de energía. Por otra parte, dado que el trabajo realizado por la fricción cinética es siempre negativo ($W_f = -f_k \Delta x$) se tiene que al estar actuado sobre un sistema le disminuirá su energía mecánica total, en tanto que debido al trabajo realizado por otras fuerzas la energía mecánica también varía.

Adicionalmente, si sobre un sistema solo actúan la fuerza gravitacional y/o la fuerza elástica, el resultado (4.48) se reduce a

$$\Delta E_m = 0 \tag{4.49}$$

La ecuación anterior es conocida como el Teorema de conservación de la energía mecánica.

Ejemplo 4.5

Una esfera se mueve a lo largo de una pista con altos y bajos desde el punto A hasta el punto E, suponga que se mueve con una velocidad inicial de 20.0 m/s y la altura h es 1.5 m, encuentre la velocidad de la esfera en el punto C.

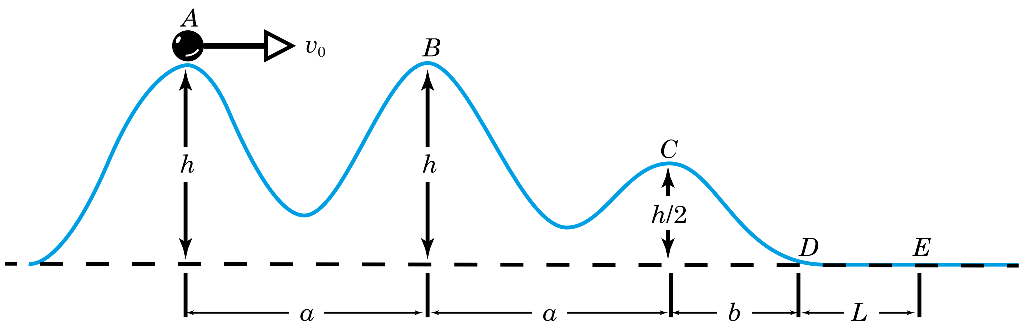


Fig. 4.14. Pista de deslizamiento de la esfera.

• *Solución*

Para encontrar la velocidad de la esfera en el punto C, tenemos en cuenta el teorema de la conservación de la energía mecánica dado por la ecuación 4.49, donde dicha energía viene dada por la ecuación 4.41 Entonces:

$$E_m = K_0 + U_{g0} + U_{e0} = K_f + U_{gf} + U_{ef}$$

Note que la energía potencial elástica es cero en este sistema ya que no hay resortes en este.

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f$$

De aquí la única variable que se desconoce es la velocidad final, por lo tanto, despejando v_f, queda:

$$v_f = \sqrt{v_0^2 + g(h_0 - h_f)}$$

Remplazando los valores dados obtenemos:

$$v_f = \sqrt{(20.0\ m/s)^2 + 2(9.8\ m/s^2)(1.5\ m - 0.75\ m)}$$

$$v_f = 20.36\ m/s$$

El aumento de la velocidad es de 0.36 m/s debido a la disminución de energía potencial gravitatoria, la cual se transforma en energía cinética.

IX. Potencia

Al subir las escaleras de la universidad para llegar al salón de clases es necesario gastar cierta cantidad de energía al transportar nuestro cuerpo, pero podemos subir las escaleras de forma pausada o bien de forma rápida. De una forma o de la otra se gastará la misma energía, la diferencia está en el tiempo que se utilice en subir las escaleras. La medida de la rapidez a la cual un sistema realiza trabajo se le denomina potencia, de esta forma aquel estudiante que sube las escaleras corriendo desarrollará mayor potencia que aquel estudiante similar a él, que sube las escaleras en forma pausada. El estudiante que corre al subir las escaleras llegara más agitado que el que va despacio, pues su cuerpo se ve forzado a gastar la misma energía en un menor tiempo, desarrollando mayor potencia

A un sistema que realiza un trabajo W sobre otro sistema en un tiempo Δt, se le define la potencia promedio desarrollada por el sistema que aplica la fuerza por medio de la expresión:

$$\overline{\boldsymbol{P}} = \frac{\boldsymbol{W}}{\Delta \boldsymbol{t}} \qquad \text{o} \qquad \overline{\boldsymbol{P}} = \frac{\boldsymbol{E}}{\Delta \boldsymbol{t}} \tag{4.50}$$

Su unidad es unidad de energía sobre unidad de tiempo. En el sistema internacional la combinación de *J/s* recibe el nombre de vatio (*W*).

También se define la potencia instantánea según la fórmula (4.51):

$$\boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{dW}}{\boldsymbol{dt}} = \frac{\boldsymbol{dE}}{\boldsymbol{dt}} \tag{4.51}$$

Por supuesto que, sí la razón a la cual un sistema realiza trabajo permanece constante, entonces la potencia media y la potencia instantánea resultan ser iguales y tener el mismo valor. Una potencia de 1*W* nos indica que el sistema realiza un julio de trabajo por cada segundo que pasa.

Otras unidades de potencia son el caballo de fuerza o *horse power* (hp), el cual se relaciona con el vatio por medio de la equivalencia

$$\boldsymbol{1hp = 746W = 0,746kW} \tag{4.52}$$

Con respecto al sistema ingles se tiene que

$$\boldsymbol{1hp = 550ft \cdot lb/s} \tag{4.53}$$

Además, que la ecuación (4.50) también se puede escribir como:

$$\boldsymbol{E = P\Delta t}$$

Dando origen a una nueva combinación de unidades para la energía, la cual sería expresada en kilovatio por hora (*kWh*). De donde se encuentra que:

$$\mathbf{1}\boldsymbol{kWh} = (\mathbf{1000}\boldsymbol{W})(\mathbf{3600}\boldsymbol{s}) = \mathbf{3,6} \times \mathbf{10^6}\boldsymbol{J} \tag{4.54}$$

Si usted revisa la facturación realizada por la empresa de energía podrá notar que el consumo de energía viene dado en kWh.

Preguntas

P1. Considere en un juego de beisbol el momento en que el pitcher lanza la bola al bateador. ¿Se puede calcular la distancia durante la cual el pitcher realiza fuerza sobre la pelota mientras la lanza?

P2. Teniendo en cuenta la definición del trabajo, donde el producto entre la fuerza y el desplazamiento es un producto punto. ¿Diga para qué valores del ángulo θ el producto punto es a) positivo, b) negativo c) cero?

P3. Cite dos ejemplos de la vida diaria en los que sobre un objeto se aplica una fuerza pero que dicha fuerza no realice trabajo sobre el objeto.

P4. En la ecuación 4.6.5 se define la energía cinética de un objeto de masa m, que se mueve con velocidad v, teniendo en cuenta esta definición ¿Puede un objeto que se mueve tener una energía cinética negativa? Explique.

P5. Cuando se dice que el trabajo total que actúa sobre un cuerpo es igual a su energía cinética final. ¿Se puede decir que esta afirmación es válida siempre, algunas veces o nunca? Justifique su respuesta.

P6. Históricamente, ¿a quién se le atribuye el planteamiento del teorema del trabajo y la energía cinética? Investigue en diferentes bases de datos para responder estas preguntas.

P7. Para un objeto sobre el cual actúan varias fuerzas el trabajo efectuado por la fuerza neta sobre el objeto es igual al cambio en su energía cinética. ¿Puede suceder que el trabajo efectuado por alguna de las fuerzas aplicadas sobre el objeto sea mayor que el cambio en su energía cinética? De ser así dé ejemplos.

P8. Suponga que se estira un resorte, desde su posición de equilibrio, una distancia x. Si se quisiera estirar una distancia adicional, ¿Qué cantidad de trabajo se debe realizar sobre el resorte?

P9. Mientras un cuerpo se desplaza sobre una línea recta se realiza un trabajo, este trabajo ¿puede ser negativo? Justifique su respuesta ¿Qué indica el signo negativo?

P10. ¿Puede la fuerza de fricción estática realizar trabajo sobre un objeto? ¿Puede la fuerza centrípeta realizar trabajo sobre un objeto? Explique en cada caso.

Ejercicios Propuestos

1. Considere un cuerpo, de masa m que se mueve con una velocidad v, que posee una energía cinética K_0, si su rapidez se duplica entonces el cambio en su energía cinética es:

a. K_0

b. $2K_0$

c. $4K_0$

d. $3K_0$

2. Suponga que tienen dos balas 1 y 2, donde la bala 2 tiene el doble de masa que la bala 1. Ambas se lanzan en línea recta con la misma velocidad. La relación de la energía cinética de la bala 2 con respecto a la bala 1, es:

a. 0.25K

b. 0.50K

c. 4.00K

d. 2.00K

3. Se requieren 4.0 J de energía para estirar 10.0 cm desde su longitud natural a un resorte. si se requiere estirar el resorte 10.0 cm adicionales, ¿Qué cantidad de trabajo se debe realizar?

a. 16.0 J

b. 12.0 J

c. 4.00 J

d. 8.00 J

4. Un objeto a cierta altura del piso posee una energía potencial gravitacional de 50.0 J. El objeto se deja caer desde el reposo hacia el piso, entonces, su energía mecánica total a mitad de camino en su caída es:

a. 50.0 J

b. 25.0 J

c. 0.0 J

d. 100 J

5. Sobre un cuerpo actúa una fuerza $\vec{F} = (3.0\hat{\imath} - 4.0\hat{\jmath})N$, mientras experimenta un desplazamiento $\vec{S} = (-4.0\hat{\imath} - 3.0\hat{\jmath})m$, entonces el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ sobre el cuerpo fue de:

a. 0.0 J

b. 2.0 J

c. -8.0 J

d. -12 J

6. Un bloque es jalado por una fuerza que actúa sobre el plano XY, con componentes $\vec{F} = (6.0\hat{\imath} - 2.0\hat{\jmath})N$, mientras experimenta un desplazamiento $\vec{S} = 3.0\hat{\imath}\,m$, con base en esta información se puede afirmar que el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ sobre el cuerpo fue de:

a. 12.0 J

b. 24.0 J

c. 6.00 J

d. 18.0 J

7. Considere un bloque de 2.0 kg, el cual es sometido a las fuerzas que se muestran en la Fig. 4.15. ¿Cuánto es el trabajo neto realizado sobre el bloque? Suponga que el desplazamiento es 2.0 m.

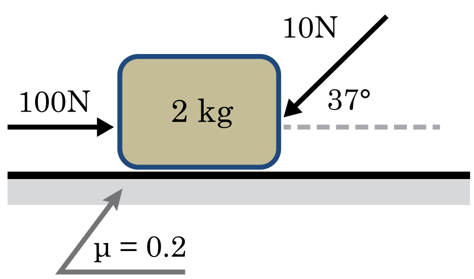


Fig. 4.15. Bloque de 2.0 kg sobre el cual actúan fuerzas externas.

a. 145.70 J

b. 248.14 J

c. 181.60 J

d. 297.49 J

8. Un bloque de 3.0 kg se mueve por un plano inclinado 25°, sin fricción, cuando es jalado por una fuerza constate de 30 N, paralela al plano y se desplaza 1.5 m sobre el plano (Fig. 4.16) ¿Cuánto es el trabajo neto realizado sobre el bloque?

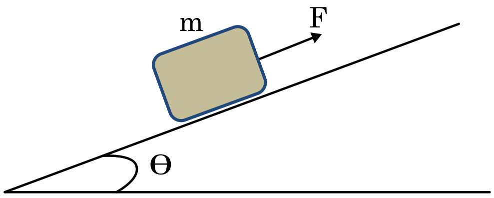


Fig. 4.16. Bloque de masa *m* jalado por una fuerza sobre el plano inclinado.

a. 78.10 J

b. 21.94 J

c. 71.37 J

d. 54.41 J

9. Considere la siguiente Fig. 4.17 donde se muestra un bloque que tiene masa de 3.0 kg el cual desliza por la rampa. Si la rampa tiene 1.0 m de longitud y existe un coeficiente de fricción entre el bloque y el plano, de 0.30, la velocidad con que llega al final de este es:

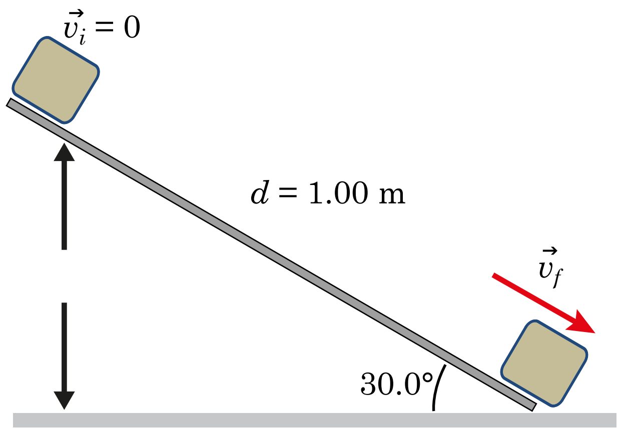


Fig. 4.17. Plano inclinado 30° respecto a la horizontal.

a. 3.13 m/s

b. 2.98 m/s

c. 4.32 m/s

d. 1.00 m/s

10. Un bloque de 2.0 kg parte del reposo, desde la cima de una pista semicircular, hasta llegar a una superficie horizontal, lisa y sin fricción, encuentre la velocidad con la que se mueve el bloque sobre la superficie (Fig. 4.18).

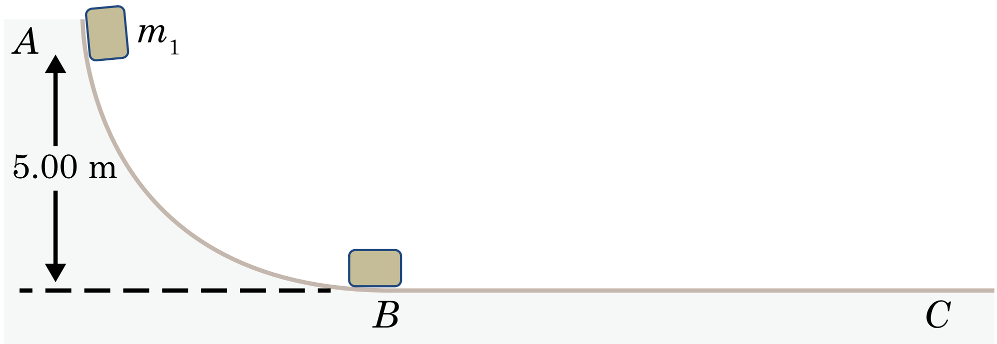


Fig. 4.18. Pista lisa y sin fricción con concavidad y superficie horizontal.

a. 3.34 m/s

b. 9.89 m/s

c. 7.78 m/s

d. 8.54 m/s

11. Teniendo en cuenta el ejemplo 4.5, con los datos suministrados en este, se puede decir que la velocidad de la esfera en el punto E es:

a. 33.65 m/s

b. 20.72 m/s

c. 21.54 m/s

d. 18.36 m/s

12. Un carro se desliza sobre una montaña rusa, la cual no posee fricción (Fig. 4.19). La pista posee una sección circular por donde asciende y luego baja el carro; si la altura donde parte el carro, con velocidad de 3.0 m/s, es de 4.5 m y el radio de la circunferencia es 1.0 m, la velocidad en la parte superior de la circunferencia es:

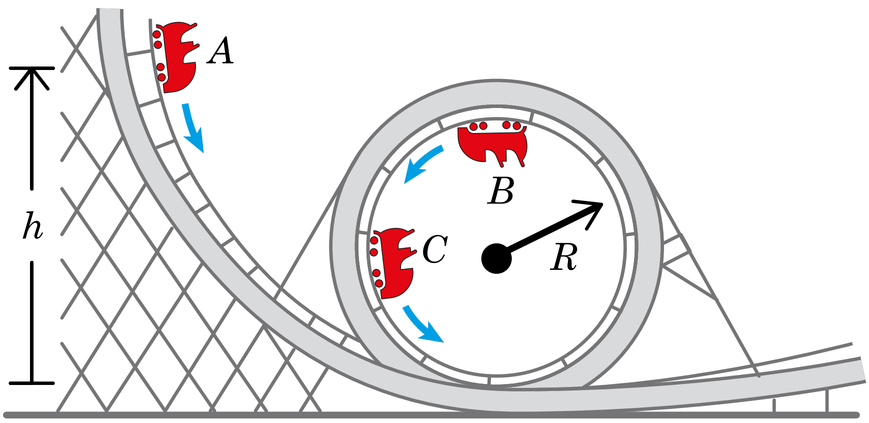


Fig. 4.19. Montaña rusa sin fricción.

a. 4.97 m/s
b. 6.87 m/s
c. 7.61 m/s
d. 9.63 m/s

13. Una piedra se lanza verticalmente hacia abajo desde la cima de un edificio de 32.0 m de altura, si la velocidad inicial es 15.0 m/s, se puede afirmar que la velocidad de la piedra a la mitad del recorrido es:

a. 12.36 m/s
b. 23.20 m/s
c. 51.31 m/s
d. 30.21 m/s

14. Considere el ejercicio anterior, ¿cuál es la velocidad de la piedra cuando llega al suelo?

a. 21.32 m/s
b. 45.25 m/s
c. 29.19 m/s
d. 16.25 m/s

15. Un bloque de cobre de 1.6 kg de masa se une a un resorte ideal horizontal que tiene una constante elástica de 1000 N/m, como se muestra en la Fig.

4.20. El resorte se comprime 2.0 cm desde su posición de equilibrio y después se libera desde el reposo. Si se desprecia la fricción existente entre el bloque y la superficie, entonces la rapidez del bloque mientras pasa por la posición de equilibrio, $x = 0$, es:

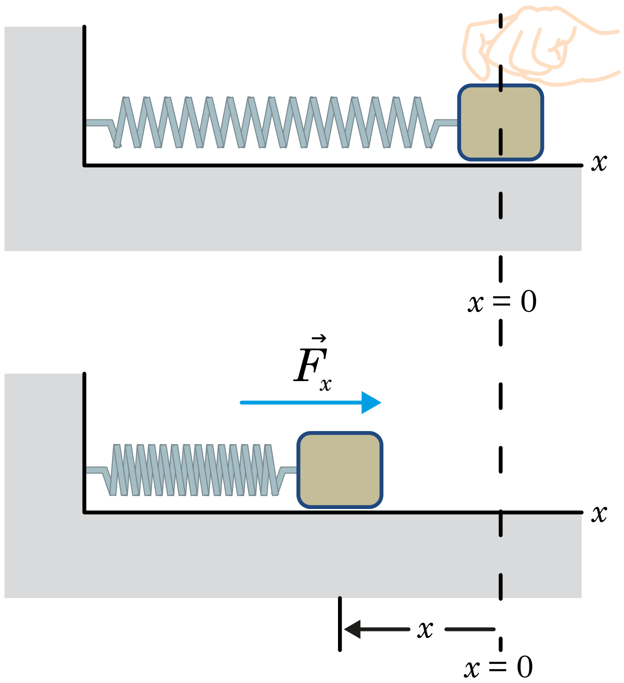


Fig. 4.20. Desplazamiento del resorte por una fuerza sobre el bloque.

a. 1.00 m/s

b. 49.8 m/s

c. 0.50 m/s

d. 0.33 m/s

Momento Lineal

En este capítulo se explican los conceptos de movimiento lineal de una partícula y varias partículas, así como su conservación. Se estudia los diferentes tipos de choques en una y dos dimensiones.

También se introducen los conceptos de momento angular y momento de fuerza, además de los fundamentos del movimiento circular uniforme y uniformemente acelerado. Se enuncia la segunda ley de Newton para cuerpos en rotación y poder introducir posteriormente la conservación del momento angular.

I. Momento Lineal para una Partícula

El momento lineal es un concepto fundamental en Física dado es un fue introducido por Newton para darle forma a su segunda ley e introducir un principio de conservación del momento lineal.

Dada una partícula de masa m, que se mueve con una velocidad $\vec{v}$, se define el Momento lineal $\vec{p}$, (también Cantidad de movimiento lineal), como el producto de la masa de una partícula por su velocidad, es decir (ecuación 5.1) [4].

$$\vec{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{v}} \tag{5.1}$$

El momento lineal $\vec{p}$, es un vector que está dirigido en la dirección y sentido de la velocidad $\vec{v}$, puesto que la masa es un escalar siempre positivo.

II. Impulso del Movimiento

El impulso del movimiento de una partícula es una magnitud vectorial $\vec{I}$, igual al producto de la fuerza aplicada $\vec{F}$ a la partícula por el tiempo en que actúa dicha fuerza (ecuación 5.2):

$$\vec{I} = \vec{F}t \tag{5.2}$$

Sabiendo que la fuerza promedio $\vec{F}$, que actúa sobre una partícula de masa m, se definió como (ecuación 5.3):

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \tag{5.3}$$

De donde se obtiene la segunda ley de Newton se puede escribir (ecuación 5.4):

$$\vec{F} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta(\mathrm{m}\vec{v})}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \tag{5.4}$$

También se establece una relación entre el impulso y momento lineal en la forma (ecuación 5.5):

$$\vec{I} = \vec{F}\Delta t = m\Delta\vec{v} = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p} \tag{5.5}$$

Las unidades de impulso y de momento lineal son las mismas: Kgm/s, gcm/s.

III. Principio de conservación del Momento Lineal de una Partícula

A partir de las leyes de la Dinámica, en particular de la segunda ley de Newton, escrita en la forma de la ecuación (5.3), se deduce que solamente las fuerzas pueden modificar el momento lineal $\vec{p}$ de un cuerpo, es decir, $\vec{F} = \Delta\vec{p}/\Delta t$. Si $\vec{F} = 0$, entonces $\Delta\vec{p}/\Delta t = 0$. Esta relación implica que el cambio en la cantidad de momento lineal es cero, $\Delta\vec{p} = 0$, lo que conlleva a que la cantidad de movimiento para una partícula en constante (ecuación 5.6) [5].

$$\vec{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{constante} \tag{5.6}$$

Principio de conservación: "Si sobre una partícula no actúa ninguna fuerza o la resultante de todas las fuerzas externas que actúan es cero, la cantidad de movimiento del cuerpo permanece constante" [2].

IV. Momento Lineal para un Sistema de Partículas

Dada un sistema partículas de masas m_1, m_2, m_3, …, m_n que se mueven con una velocidad $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, …, $\vec{v}_n$ respectivamente se define la Cantidad de Movimiento Lineal del sistema de Partículas $\vec{p}$, como la suma vectorial de los momentos lineales de cada partícula, es decir (ecuación 5.7):

$$\vec{\boldsymbol{p}} = \vec{\boldsymbol{p}}_1 + \vec{\boldsymbol{p}}_2 + \vec{\boldsymbol{p}}_3 + \cdots + \vec{\boldsymbol{p}}_n \tag{5.7}$$

V. Principio de conservación del Momento Lineal para un Sistema de Partículas

En forma análoga al Principio de conservación de una partícula se puede establecer el Principio de conservación de un sistema de partículas: "Para un sistema aislado (donde solamente actúan fuerzas interiores al sistema), la cantidad de movimiento del sistema de partículas permanece constante" [5].

Matemáticamente para un sistema aislado, se tiene (ecuación 5.8):

$$\Delta\vec{\boldsymbol{p}} = \Delta\vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{1}} + \Delta\vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{2}} + \Delta\vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{3}} + \cdots + \Delta\vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{n}} = \mathbf{0} \tag{5.8}$$

Para el caso de dos partículas esta expresión se puede escribir (ecuación 5.9):

$$\Delta\vec{\boldsymbol{p}} = \Delta\vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{1}} + \Delta\vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{2}} = \mathbf{0} \tag{5.9}$$

Que al desarrollar se obtiene la siguiente relación (ecuación 5.10):

$$\vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{i1}} + \vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{i2}} = \vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{f1}} + \vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{f2}} \tag{5.10}$$

La cual también se puede escribir (ecuación 5.11):

$$\boldsymbol{m}_{\mathbf{1}}\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i1}} + \boldsymbol{m}_{\mathbf{2}}\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i2}} = \boldsymbol{m}_{\mathbf{1}}\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{f1}} + \boldsymbol{m}_{\mathbf{2}}\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{f2}} \tag{5.11}$$

Ejemplo 5.1

Una pelota de 0,5 kg de masa se lanza horizontalmente contra una pared con una rapidez de 40 m/s (Fig. 5.1). Sabiendo que esta rebota con la misma rapidez y que el tiempo de interacción pared-pelota es aproximadamente $\Delta t = 10^{-3} s$, determine cuanto fue la fuerza promedio que la pared ejerce sobre la pelota durante el tiempo que estuvo en contacto.

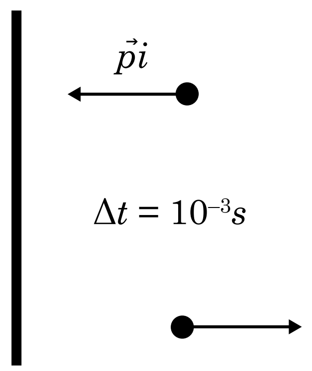


Fig. 5.1. Momento lineal antes y después de rebotar con la pared.

- *Solución*

Se debe determinar la cantidad de movimiento de la pelota, antes y después de rebotar contra la pared aplicando $\vec{p} = m\vec{v}$.

Por lo que, antes de chocar con la pared el momento es:

$$\vec{p}_i = (0{,}5\ kg)\left(-40\hat{\imath}\frac{m}{s}\right) = -20\hat{\imath}\ kg\ m/s$$

Mientras que, después de rebotar contra la pared, el momento es:

$$\vec{p}_f = (0{,}5\ kg)\left(40\hat{\imath}\frac{m}{s}\right) = 20\hat{\imath}\ kg\ m/s$$

Entonces, el cambio en la cantidad de movimiento es:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = 40.0\hat{\imath}\ kg\ m/s$$

Por lo que, la fuerza promedio que actúa sobre la pelota es:

$$\tilde{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = 40000.0\,\hat{\imath}\,N$$

VI. Colisiones Elásticas e Inelásticas en una Dimensión

Suponga que se tienen dos masas m_1 y m_2, las cuales colisionan mutuamente y no actúa ninguna otra fuerza externa, por lo cual se puede asegurar que durante la colisión únicamente aparece, la fuerza de interacción entre ellas, por la tercera ley de Newton, las cuales son iguales, pero con dirección opuestas, sin embargo, estas fuerzas no cambian la cantidad de movimiento de las masas [3].

Las colisiones entre cuerpos suelen clasificarse en tres tipos:

1. *Colisión Elástica*: En este tipo de colisiones la energía cinética de las partículas se mantiene igual antes y después de la colisión.
2. *Colisión Inelástica*: En este tipo de colisiones la energía cinética de las partículas no es constante, parte de esta energía se pierde en forma de calor, por la deformación de los cuerpos.

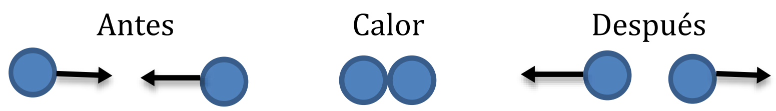


Fig. 5.2. Colisión Elástica, antes y después del choque.

3. *Colisión completamente Inelástica*: **N**ormalmente en este tipo de choques los cuerpos se mantienen unidos después de la colisión.

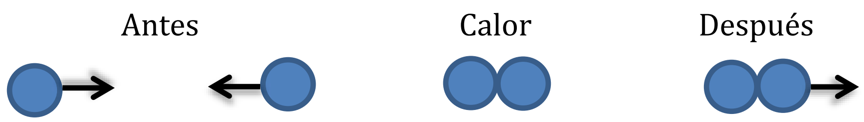


Fig. 5.3. Colisión completamente Inelástica.

VII. Colisión Elástica de dos cuerpos en una dimensión

Supongamos que se tienen dos cuerpos moviéndose en la misma dirección, tal como se muestra en la Fig. 5.3.

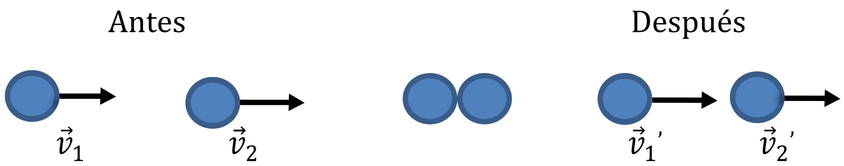


Fig. 5.4. Colisión elástica en una dimensión.

En la Fig. 5.4, se muestran los vectores velocidad de las masas antes y después de una colisión elástica. Conociendo las velocidades antes de la colisión, se puede hallar las velocidades después del choque, aplicando el principio de conservación del momento lineal [2] o también la conservación de la energía cinética. Por lo tanto (ecuación 5.12).

$$\boldsymbol{E_C(ANTES) = E_C(DESPUES)}$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}m_1(v_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2)^2 = \frac{1}{2}m_1(v_1')^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2')^2} \tag{5.12}$$

De aquí se obtiene:

$$m_1[(v_1)^2 - (v_1')^2] = m_2[(v_2')^2 - (v_2)^2]$$

Por otro lado, la conservación de la cantidad de movimiento en este caso es (ecuación 5.13):

$$\boldsymbol{p(Antes) = p(Después)}$$

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2 \tag{5.13}$$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2$$

De donde se obtiene:

$$m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2)$$

Al resolver las ecuaciones, se obtienen las velocidades después de la colisión:

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}v_1 + \frac{2m_2}{(m_1 + m_2)}v_2$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)}v_1 + \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)}v_2$$

Ejemplo 5.2

Dos deslizadores de masas (m_1 = 0,6 Kg y m_2 = 0,3 Kg), se acercan uno al otro sobre un riel de aire sin fricción, con velocidades v_1 = 3.0 m/s y v_2=-3.0 m/s. Después de chocar, el deslizador 2 rebota. ¿Cuál es la velocidad final de los deslizadores? Compare los cambios del momento lineal y velocidad de los dos deslizadores.

- *Solución*

De la ecuación (5.12):

$$E_C(ANTES) = E_C(DESPUES)$$

$$\frac{1}{2}m_1(v_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2)^2 = \frac{1}{2}m_1(v'_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(v'_2)^2$$

$$(0,6)(0,3)^2 + (0,3)(-0,3)^2 = (0,6)(v'_1)^2 + (0,3)(v'_2)^2$$

$$27 = 2(v'_1)^2 + (v'_2)^2$$

De la ecuación 5.13:

$$p(ANTES) = p(DESPUES)$$

$$(0,6)(0,3) + (0,3)(-0,3) = (0,6)v'_1 + (0,3)v'_2$$

$$3 = 2v'_1 + v'_2$$

$$v'_2 = 3 - 2v'_1$$

Introduciendo v'_2 en la expresión anterior y resolviendo se obtiene que los posibles valores para v'_1 son: $v'_1 = 3$ m/s, $v'_1 = -1$ m/s. El valor más probable físicamente es $v'_1 = -1$ m/s, por cuanto al haber choque la partícula de mayor masa debe reducir su velocidad y la menor puede ser incrementada. Reemplazando se obtiene que:

$$v'_2 = 3 - 2(-1) = 5\ m/s$$

Lo cual indica que las dos partículas rebotan moviéndose en direcciones contrarias a las originales.

VIII. Colisión Elástica en dos dimensiones

Para el caso del choque elástico en dos dimensiones se mantienen la ecuación 5.12 sobre la conservación de la energía cinética. Mientras que para el caso de la conservación del momento lineal se debe usar la ecuación 5.13, pero en forma vectorial puesto que se descompone en el plano respectivo (XY).

Ejemplo 5.3

En la siguiente Fig. 5.5 se muestran dos esferas: una inicialmente en reposo y otra, moviéndose con velocidad de 4.0 m/s sobre el eje x, las cuales colisionan. la esfera azul, tiene una masa de 18.0 kg mientras la esfera verde tiene 10 kg. Luego de la colisión la esfera azul tiene se mueve con rapidez de 1.5 m/s formando un ángulo de 30° con su dirección inicial ¿Cuál es la velocidad final de la esfera verde?

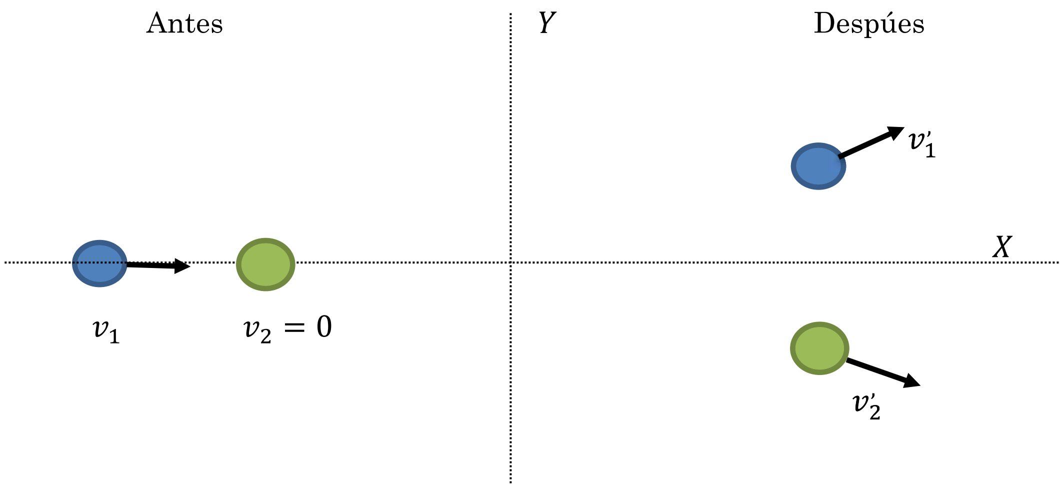


Fig. 5.5. Colisión antes y después en dos dimensiones.

• *Solución*

Para resolver este ejercicio aplicamos la ecuación 5.13, donde se tiene que luego de la colisión hay un movimiento en dos dimensiones, por lo tanto, se tiene.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

En el eje x obtenemos.

$$18\ kg\ (4.0\ m/s) = 18\ kg\ 1.5\ m/s\ cos\ 30° + 10\ kg\ v_2' cos\ \theta$$

Despejando $v'_2 cos\ \theta$, queda

$$v_2' cos\ \theta = 18\ kg\ (4.0\ m/s) - 18\ kg\ (1.5\ m/s) cos\ 30°$$

$$v_2' cos\ \theta = 4.86\ \ m/s$$

Esto es la componente de la velocidad en el eje x

En el eje y obtenemos.

$$0 = 18\,kg\;1.5\,m/s\;sen\,30° + 10\,kg\;v'_2 sen\,\theta$$

Despejando $v'_2 sen\,\theta$, queda

$$v'_2 sen\,\theta = \frac{-18\,kg\;1.5\,m/s\;sen\,30°}{10\,kg}$$

$$v'_2 sen\,\theta = -1.35\,m/s$$

Esto es la componente de velocidad en el eje y.

Para obtener dicha velocidad calculamos su magnitud y obtenemos que:

$$v'_2 = 5.04\;\;m/s$$

Además, con las componentes obtenidas podemos obtener el ángulo por debajo del eje x.

$$\theta = -15.52°$$

Preguntas

P1. Se tienen dos martillos uno pesado y otro liviano, ¿Cuál es más efectivo cuando se quiere clavar una cuña sobre pared? Explique

P2. Se requiere que una persona detenga el movimiento de un automóvil y de un carrito de juguete, que tienen el mismo momento lineal. ¿Cuál de los dos debería detener? ¿Por qué?

P3. Cuando un automóvil se mueve en dirección norte con velocidad constante, tiene la misma energía cinética que si lo hace en la misma manera, hacia el sur ¿se puede afirmar que el momento lineal en ambos casos también es igual? Explique.

P4. Considere el caso donde un camión grande y pesado se mueve con velocidad constante y un automóvil liviano moviéndose también con velocidad constante; ambos chocan con un muro de concreto, ¿en cuál de los casos se tienen más probabilidades de que los pasajeros sufran más daños?

P5. Cuando se disparan balas sobre una placa de acero ¿la fuerza media producida por las balas es mayor si las balas rebotan o se incrustan sobre la placa? ¿Por qué?

P6. Considere una fuerza de 10 N, la cual actúa sobre un cuerpo en reposo durante un pequeño tiempo de 0.12 s, impartiendo una rapidez final de 2.5 m/s, ¿es posible que una fuerza de 5.0 N imparta la misma rapidez sobre el mismo cuerpo?

P7. Si una persona se encuentra en medio de un lago congelado, solo y sin objetos en sus bolsillos, ¿podría llegar hasta la orilla del lago solo dando impulso por si solo?

P8. Cuando un cuerpo cae verticalmente por efectos de la gravedad, ¿se podría decir que se conserva el momento lineal o la energía mecánica del cuerpo? Justifique su respuesta.

P9. Si tiene dos pedazos de plastilina en forma esférica y los hace chocar de tal forma que queden pegados, ¿se puede decir que se conserva la energía mecánica o el momento lineal? Justifique su respuesta

P.10. Suponga que tiene dos esferas pequeñas, las cuales se encuentran en los extremos de un resorte ligero, sin que se unan, luego se sueltan y ruedan libremente por una superficie lisa y sin fricción ¿se puede afirmar que se conserva el momento lineal o la energía mecánica? ¿Por qué?

Ejercicios Propuestos

1. Suponga que tiene dos esferas de masa m y 2m, respectivamente, ambas con igual velocidad, pero con direcciones opuestas, si estas chocan se observa que la esfera con masa 2m retrocede 1/3 de su velocidad inicial. ¿Con qué velocidad retrocede el cuerpo de masa m?

a. v/3

b. v

c. 5v/3

d. 3v/5

2. Suponga que tiene dos esferas de masa m y 2m, respectivamente, ambas con igual velocidad, pero con direcciones opuestas, si estas chocan se observa que la esfera con masa 2m retrocede 1/3 de su velocidad inicial. El cuerpo de masa m también retrocede, ¿Cómo es el cambio en la energía cinética del sistema?

a. Cero

b. Mayor que Cero

c. Menor que Cero

d. permanece igual

3. Una esfera con masa de 2.0 kg tiene una velocidad de 20.0 m/s, y choca de manera frontal con otra esfera de 0.5 kg cuya velocidad es de 10 m/s. Sabiendo que los cuerpos quedan pegados, la velocidad de los cuerpos después del impacto es:

a. 12.0 m/s

b. 16.0 m/s

c. 18.0 m/s

d. 14.0 m/s

4. Suponga que dos esferas de 1.0 kg cada uno, se mueven en misma dirección, pero sentidos opuestos sobre una superficie lisa. Uno va a 4.0 m/s hacia la derecha y el otro a 2.0 m/s, chocan de manera inelástica, quedando con la misma velocidad al final. La velocidad después del choque es:

a. 2.0 m/s

b. 1.0 m/s

c. 3.0 m/s

d. 4.0 m/s

5. Suponga que dos esferas de 1.0 kg cada uno, se mueven en misma dirección, pero sentidos opuestos sobre una superficie lisa. Uno va a 4.0 m/s hacia la derecha y el otro a 2.0 m/s, chocan de manera inelástica, quedando con la misma velocidad al final. La energía cinética perdida es:

a. 1.0 J

b. 10.0 J

c. 9.0 J

d. 5.0 J

6. Suponga que dos esferas de 1.0 kg cada uno, se mueven en misma dirección, pero sentidos opuestos sobre una superficie lisa. Uno va a 4.0 m/s hacia la derecha y el otro a 2.0 m/s, chocan de manera inelástica, quedando con la misma velocidad al final. La velocidad después del choque es:

a. 2.0 m/s

b. 1.0 m/s

c. 3.0 m/s

d. 4.0 m/s

7. Suponga que dos esferas de 1.0 kg cada uno, se mueven en misma dirección, pero sentidos opuestos sobre una superficie lisa. Uno va a 4.0 m/s hacia la derecha y el otro a 2.0 m/s, chocan de manera inelástica, quedando con la misma velocidad al final. La energía cinética perdida es:

a. 1.00 J

b. 10.0 J

c. 9.00 J

d. 5.00 J

8. La bala de un rifle sale disparada con una velocidad de 345.0 m/s, cuando es disparado. Si la masa de la bala es de 90 g y el rifle tiene una masa de 5.0 kg, entonces la velocidad de retroceso del rifle es:

a. -2.78 m/s

b. -0.27 m/s

c. -1.54 m/s

d. -4.51 m/s

9. Suponga que usted está en una balsa de 2.0 kg, sobre un lago. Dentro de la cual tiene una piedra de 5.0 kg, que desea arrojar en el lago. Cuando usted lanza la piedra horizontalmente sobre el lago, con una velocidad de 0.5 m/s, la balsa se mueve hacia atrás, la velocidad de retrocesos de la balsa es:

a. -1.00 m/s

b. -1.45 m/s

c. -2.32 m/s

d. -1.25 m/s

10. Dos carritos se interceptan en una esquina, formando un ángulo de 90°, ambos carritos tienen igual masa, pero el carro que se mueve horizontalmente se mueve con una velocidad de 3.0 m/s mientras que el carrito que se mueve verticalmente se mueve a la mitad de dicha velocidad, si la colisión es completamente inelástica la dirección del movimiento es:

a. -54.62 °

b. -10.26 °

c. -94.32 °

d. -26.56 °

11. Dos carritos se interceptan en una esquina, formando un ángulo de 90°, ambos carritos tienen igual masa, pero el carro que se mueve horizontalmente se mueve con una velocidad de 3.0 m/s mientras que el carrito que se mueve verticalmente se mueve a la mitad de dicha velocidad, si la colisión es completamente inelástica la rapidez final de ambos carritos es:

a. 2.32 m/s

b. 5.45 m/s

c. 1.67 m/s

d. 3.62 m/s

12. Dos carritos se interceptan en un cruce de una esquina, formando un ángulo de 90°, la masa del primer es de 3.0 kg y la del segundo es de 5.0 kg, el primer carro se mueve horizontalmente con una velocidad de 4.5 m/s mientras que el segundo carro se mueve verticalmente con una velocidad de 2.0 m/s, si la colisión es completamente inelástica la rapidez final de ambos carritos es:

a. 2.10 m/s

b. 5.45 m/s

c. 1.67 m/s

d. 3.62 m/s

13. Dos carritos se interceptan en un cruce de una esquina, formando un ángulo de 90°, la masa del primer es de 3.0 kg y la del segundo es de 5.0 kg, el primer carro se mueve horizontalmente con una velocidad de 4.5 m/s mientras que el segundo carro se mueve verticalmente con una velocidad de 2.0 m/s, si la colisión es completamente inelástica la dirección final del movimiento es:

a. 48.35 °

b. 36.48 °

c. 18.21 °

d. 36.48 °

14. Considere dos esferas, como en el ejemplo 5.3 una inicialmente en reposo y otra, moviéndose con velocidad de 4.0 m/s sobre el eje x, las cuales colisionan; la esfera azul, tiene una masa de 10.0 kg mientras la esfera verde tiene 12.0 kg. Luego de la colisión la esfera azul tiene se mueve con rapidez de 1.5 m/s formando un ángulo de 30° con su dirección inicial. La velocidad final de la esfera verde:

a. 1.93 m/s

b. 2.45 m/s

c. 1.07 m/s

d. 2.94 m/s

15. Considere dos esferas, como en el ejemplo 5.3 una inicialmente en reposo y otra, moviéndose con velocidad de 4.0 m/s sobre el eje x, las cuales colisionan; la esfera azul, tiene una masa de 10.0 kg mientras la esfera verde tiene 12.0 kg. Luego de la colisión la esfera azul tiene se mueve con rapidez de 1.5 m/s formando un ángulo de 30° con su dirección inicial. La dirección del carrito 2 es:

a. 41.21 °

b. 18.85 °

c. 84.54 °

d. 36.40 °

Movimiento de Rotación de Sólidos Rígidos

En capítulos anteriores se hizo el estudio del movimiento circular uniforme, haciendo la distinción entre: Posición y posición angular, velocidad lineal y velocidad angular, aceleración y aceleración angular. La idea en esta sección es dar a conocer el del momento angular a partir de ejemplos del movimiento circular, realizados de manera clara y sencilla utilizando los conceptos previos.

I. Movimiento Circular Uniformemente Acelerado, M.C.U.A

Para este tipo de movimiento, la velocidad angular de la partícula varía linealmente con el tiempo y se presenta una aceleración angular constante α. Teniendo en cuenta el movimiento uniforme acelerado y realizando los respectivos cambios de variables, las ecuaciones del movimiento son (6.1)(6.2)[6]:

$$\boldsymbol{w = w_0 + \alpha t} \tag{6.1}$$

$$\boldsymbol{\theta = \theta_0 + wt + \frac{1}{2}\alpha t^2} \tag{6.2}$$

Siendo α, la aceleración angular del movimiento y w la velocidad angular y θ el desplazamiento angular.

Así como existe una relación entre la velocidad lineal y la angular, también existe una relación matemática entre las aceleraciones lineal y angular en la forma (ecuación 6.3):

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{R\alpha} \tag{6.3}$$

Donde R es el radio de la circunferencia que describe la partícula.

II. Energía Cínetica Rotacional y Momento de Inercia

Suponga que una particula se mueve en un circulo de radio R, entonces la velocidad linal de la particula es $v = wR$. Ahora, si se considera la masa m, de dicha particula, tendra una energía cinética (ecuación 6.4):

$$\boldsymbol{K} = \frac{\boldsymbol{mv^2}}{\boldsymbol{2}} = \frac{\boldsymbol{mw^2R^2}}{\boldsymbol{2}} \tag{6.4}$$

Para el caso de un “Cuerpo rígido”, donde el cuerpo está conformado por muchas particulas de diferentes masas localizada a diferentes distancias del eje de rotación. La energía cinética total del cuerpo será la suma de las energías cinéticas de cada partícula que forma el cuerpo (ecuación 6.5) [6].

$$\boldsymbol{K_{rot}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\boldsymbol{m_i v_i^2}}{\boldsymbol{2}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\boldsymbol{m_i w_i^2 R_i^2}}{\boldsymbol{2}} \tag{6.5}$$

En este caso la velocidad angular es igual para cada una de las partículas ($w_i = w$), por lo que (ecuación 6.6):

$$\boldsymbol{K_{rot}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m_i R_i^2}\right) \boldsymbol{w^2} \tag{6.6}$$

Además, se define momento de inercia como la ecuación 6.7:

$$\boldsymbol{I} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m_i R_i^2} \tag{6.7}$$

El cual se representa por la letra I y tiene unidades de kg.m^2 en el SI; la energia cinetica rotacional del cuerpo se expresa como (ecuación 6.8):

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I w^2 \tag{6.8}$$

Observa la similitud entre los términos m para el movimineto lineal e I para el movimiento rotacional. Además hay que tener cuidado que las expresiones para la energía cinética tienen validéz tanto para MCU como para MCUA. Para MCU se debe tomar para la velocidad angular la expresión (2.24) y para el caso MCUA se toma la expresión (6.1).

Ejemplo 6.1

Una rueda para afilar cuchillos tiene forma de disco de radio de 25.0 cm. Su masa es de 2.0 kg y gira a 350 rev/min. Hallar su energía cinética.

- *Solución*

Para encontrar la energía cinética rotacional se debe calcular primero el momento de inercia utilizando la ecuación 6.7:

$$I = 2.0\ kg(0.25\ m) = 0.5 kg.m$$

Ahora se utiliza la ecuación 6.8 para encontrar la energía cinética rotacional:

$$K_{rot} = \frac{1}{2}\left(0.5\ kg.m^2\right)\left(5.83\frac{rev}{s}\right)^2 = 8.50\ J$$

III. Producto Vectorial o Cruz entre Vectores

Como es sabido en fisica cantidades pueden ser escalares y vectoriales. Las cantidades vectoriales se pueden sumar y restar, hallando su magnitud y dirección, mientras que el producto de dos vectores se definen dos: el producto punto o escalar y el producto cruz o vectorial. El producto punto de dos vectores ya fue introducido anteriormente, el cual se usó para la definición de trabajo realizado por una fuerza. En éste caso se requiere introducir dos nuevas cantidades en física como es el Momento Angular y el Momento de Fuerza o Torque y para ello el producto vectorial entre dos vectores [4].

Dados dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, se define el producto cruz o vectorial entre ellos como otro vector, escrito $\vec{A}\times\vec{B}$, que es perpendicular al plano formado por los vectores respectivos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y cuya dirección se sigue mediante la regla de la mano derecha (Fig. 6.1).

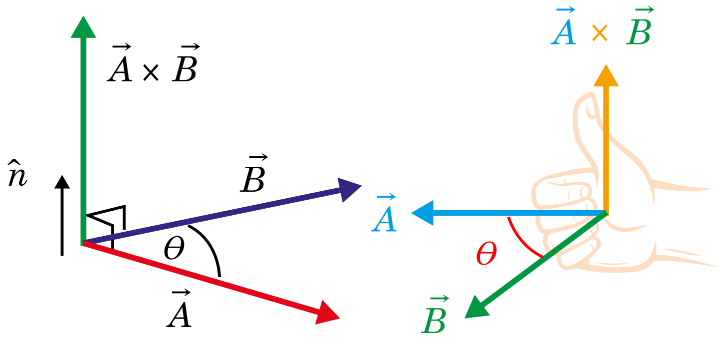


Fig. 6.1. Regla de la mano derecha.

Los cuatro dedos avanzan del vector $\vec{A}$ hacia el vector B quedando el dedo pulgar en la dirección y sentido del producto cruz $\vec{A}\times\vec{B}$. La magnitud del producto vectorial $\vec{A}\times\vec{B}$ se define como (ecuación 6.9):

$$|\vec{\boldsymbol{A}}x\vec{\boldsymbol{B}}| = |\vec{\boldsymbol{A}}||\vec{\boldsymbol{B}}|\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\theta} \tag{6.9}$$

Siendo θ el ángulo menor de 180° entre los vectores $\vec{A}\times\vec{B}$.

De la definición se observa que si los los vectores estan en la misma dirección, el ángulo formado entre ellos sería: $\theta = 0°$ o $\theta = 180°$, de tal manera que en cualquiera de los dos casos el producto vectorial es cero, es decir, $\vec{A}\times\vec{B} = 0$.

Para el caso del sistema cartesiano de coordenadas los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ que representan a los ejes X, Y y Z respectivamente, se tiene (ecuación 10):

$$\left.\begin{array}{c} \hat{\boldsymbol{\imath}} x \hat{\boldsymbol{\imath}} = \hat{\boldsymbol{\jmath}} x \hat{\boldsymbol{\jmath}} = \hat{\boldsymbol{k}} x \hat{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0} \\ \hat{\boldsymbol{\imath}} x \hat{\boldsymbol{\jmath}} = -\hat{\boldsymbol{\jmath}} x \hat{\boldsymbol{\imath}} = \hat{\boldsymbol{k}} \\ \hat{\boldsymbol{\jmath}} x \hat{\boldsymbol{k}} = -\hat{\boldsymbol{k}} x \hat{\boldsymbol{\jmath}} = \hat{\boldsymbol{\imath}} \\ \hat{\boldsymbol{k}} x \hat{\boldsymbol{\imath}} = -\hat{\boldsymbol{\imath}} x \hat{\boldsymbol{k}} = \hat{\boldsymbol{\jmath}} \end{array}\right] \tag{6.10}$$

Basado en estas propiedades se puede desarrollar el producto vectorial entre dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, los cuales estan expresados en términos de sus componentes:

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$$

El producto vectorial es:

$$\vec{A}x\vec{B} = \begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix}$$

Al desarrollar se obtiene:

$$\vec{A}x\vec{B} = \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\hat{\imath} - (A_xB_z - A_zB_x)\hat{\jmath} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\hat{k}$$

Ejemplo 6.2

Dados los vectores $\vec{A} = -2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + \hat{k}$ y $\vec{B} = 5\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$, hallar el vector $\vec{A}\times\vec{B}$ y su magnitud.

- *Solución*

De acuerdo con la expresión anterior, se tiene:

$$\vec{A}x\vec{B} = \begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix} = [(4)(2)-(1)(-3)]\hat{\imath} - [(-2)(2)-(1)(5)]\hat{\jmath} + [(-2)(-3)-(4)(5)]\hat{k}$$

El vector resultante es:

$$\vec{A}x\vec{B} = 11\hat{\imath} + 9\hat{\jmath} - 14\hat{k}$$

Cuya magnitud es:

$$\left|\vec{A}x\vec{B}\right| = \sqrt{398}$$

IV. Momento Angular

Dada una partícula de masa m, siendo $\vec{r}$ el vector de posición respecto a un punto origen y que tiene una velocidad $\vec{v}$, se define el momento angular [5], $\vec{L}$, como el producto vectorial del vector de posición $\vec{r}$ (brazo) y el momento lineal $\vec{p}$, es decir (ecuación 6.11):

$$\boldsymbol{\vec{L} = \vec{r}x\vec{p} = m\vec{r}x\vec{v}} \qquad (6.11)$$

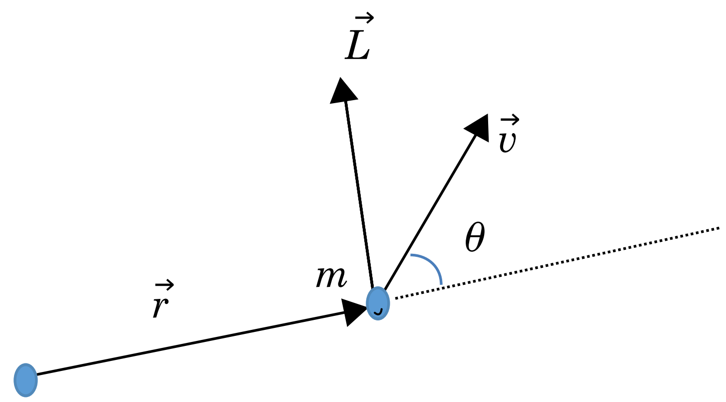


Fig. 6.2. Vectores Posición, Velocidad y Momento Angular con respecto a un punto O.

El vector $\vec{L}$ es perpendicular al plano donde se encuentran ubicados los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$, este vector es paralelo a la recta denominada eje de rotación. Observando la Fig. 6.2 donde se considera que θ es ángulo que hace el vector de posición y la velocidad, la magnitud del momento angular queda expresada en la forma (ecuación 6.12):

$$\boldsymbol{L = mrv \sin \theta} \tag{6.12}$$

Esta ecuación es considerada como **momento angular**. El momento angular es una magnitud física muy importante en la física mecánica, desde la mecánica clásica hasta la mecánica cuántica. Su importancia radica en la relación de las simetrías rotacionales de los sistemas físicos utilizados en la solución de distintos problemas.

Por otro lado, cuando se tiene un **Movimiento de Rotación**, esta magnitud desempeña un papel análogo al momento lineal en las traslaciones. Cuando una particula de masa m se mueve en un circulo de radio R con una velocidad angular w. Si su velocidad lineal es v, entonces, tendra un mometo lineal y momento angular $\vec{L}$.

El **Momento Angular, L,** de la particula se define como el producto de la cantidad de movimiento lineal $P = mv$ por la distancia perpendicular, dada del eje a la particula que gira, es decir (ecuación 6.13):

$$\boldsymbol{L = mvr} \tag{6.13}$$

Para un cuerpo rigido todas las particulas que lo forman tiene la misma velocidad angular w y como $v = wR$, entonces (ecuación 6.14) (ecuación 6.15):

$$\boldsymbol{L = mvr = mr^2 w} \tag{6.14}$$

$$\boldsymbol{L = Iw} \tag{6.15}$$

Siendo I: el momento de inercia de la respectiva partícula.

V. Momento de Torsión o Torque

Supongamos que un cuerpo se puede hacer suspender respecto a un punto fijo *0*, si se aplica una fuerza $\vec{F}$, siendo $\vec{r}$ el vector de posición que va desde el punto de suspensión del cuerpo hasta el punto donde se aplica la fuerza, se define el momento de torción [5] o torque como (ecuación 6.16):

$$\vec{\tau} = \vec{r} x \vec{F} \tag{6.16}$$

La unidad de medida para el torque es newton- metro y normalmente se deja expresado así, sabiendo que su equivalencia es el Julios, está es para la unidad de la energía o el trabajo (Fig. 6.3).

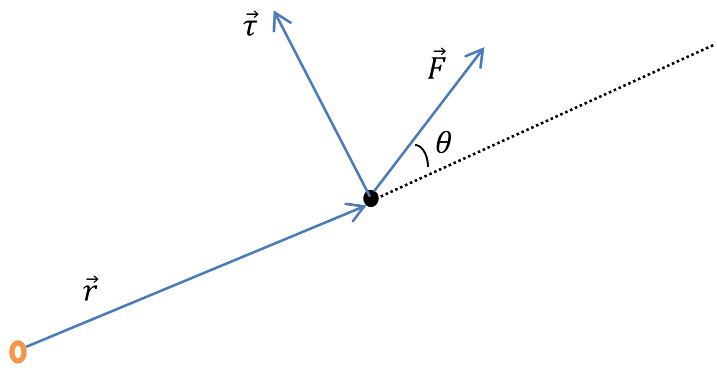


Fig. 6.3. Vectores Posición, Fuerza y Torque sobre una partícula.

La magnitud del momento de fuerza es (ecuación 6.17):

$$\tau = rFsen\theta \tag{6.17}$$

Siendo θ es el ángulo entre el vector de posición $\vec{r}$ y la fuerza externa aplicada $\vec{F}$.

Una particula de masa m que se mueve en una curva de radio r, velocidad angular w y una aceleración angular α, el momento de fuerza toma una forma:

$$\tau = rFsen\theta = r(mr\alpha)sen\theta = (mr^2\alpha)sen\theta$$

Generalmente en un movimiento circular de la partícula $\theta = 90°$, en ese caso (ecuación 6.18):

$$\boldsymbol{\tau = I\alpha} \qquad (6.18)$$

La cual es una expresión análoga a la segunda ley de Newton para una partícula en movimiento traslacional. La ecuación (6.18) representa la segunda ley de Newton para movimiento rotacional.

VI. Conservación del Momento Angular

La relación que hay entre el momento angular y el torque de una partícula se expresa en la forma (ecuación 6.19):

$$\boldsymbol{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}} \qquad (6.19)$$

Donde $\vec{\tau}$ representa el torque de la partícula o la sumatoria de torques de un sistema de partículas. Si $\vec{\tau} = 0$, la cantidad de movimiento angular no cambia, es decir (ecuación 6.20):

$$\boldsymbol{\vec{L} = Constante} \qquad (6.20)$$

Normalmente los atletas como patinadores y acrobatas tienden a disminuir o a aumentar su velocidad angular cuando extienden o encogen las partes de su cuerpo. Ahora, se debe tener en cuenta que en ciertas condiciones de simetría, para algunos sistemas, es una magnitud que se mantiene constante por lo cual da lugar a la ley de conservación del momento angular, la cual se enuncia de la siguiente manera: “Si la suma de los momentos de torsion que actuan sobre un cuerpo o sistema de cuerpos es igual a cero, entonces la cantidad de movimiento angular permanece constante” [7].

Ejemplo 6.3

Suponga que tiene dos discos. Uno (A) y el otro (B), Sus momentos de inercia son 30.0 kg.m y 12.0 kg.m respectivamente. Inicialmente, los discos están girando con rapidez angular constantes de 25.0 rad/s y 125.0 rad/s, respectivamente. Luego, se juntan los discos con fuerzas que actúan sobre el eje. Los discos se frotan entre sí y finalmente alcanzan una rapidez angular final w. Encuentre la rapidez angular final con la que giran los discos.

- *Solución*

Para encontrar la rapidez final se aplicará la ley de conservación del momento angular igualando el momento angular antes de juntar los discos y después de juntarlos.

El momento angular antes y después de juntarlos se puede obtener por medio de la ecuación 6.20.

$$\boldsymbol{L_{antes} = I_A w_A + I_B w_B}$$
$$\boldsymbol{L_{despues} = (I_A + I_B) w}$$

Igualando estas dos ecuaciones se obtiene:

$$\boldsymbol{I_A w_A + I_B w_B = (I_A + I_B) w}$$

Se remplaza los valores y se despeja el valor de w:

$$\boldsymbol{w = \frac{I_A w_A + I_B w_B}{(I_A + I_B)}}$$

$$w = \frac{30\ kg.m(25.0\ rad/s) + 12kg.m(125.0\ rad/s)}{(30\ kg.m + 12\ kg.m)}$$

$$w = 53.57\ rad/s$$

VII. Condiciones de Equilibrio

Para que un cuerpo se mantenga en equilibrio se requiere que cumpla con dos condiciones como son la condición de traslación (capitulo 3) y la condición de rotación.

Condición de traslación: la cual se desprende de la segunda ley de newton para partículas que tienen movimiento de traslación. La sumatoria de fuerzas que actúan sobre el cuerpo debe ser igual a cero, es decir (ecuación 6.21):

$$\sum \vec{F} = 0 \qquad (6.21)$$

Condición de Rotación: la cual se desprende de la segunda ley de newton para partículas que describen movimiento de rotación respecto de un eje fijo. En este caso la sumatoria de torques de las diferentes fuerzas que actúan sobre el cuerpo debe ser igual a cero, es decir (ecuación 6.22):

$$\sum \vec{\tau} = 0 \qquad (6.22)$$

Estas condiciones se resumen del hecho que se desprende de la segunda ley de newton tanto la de traslación como la de rotación, en las cuales se requiere que el cuerpo no tenga aceleración traslacional ni aceleración angular ($\vec{a} = 0$ y $\alpha = 0$).

Preguntas

P1. Dos partículas de masas: m1 = m y m2 = m, se mueven con MCU con la misma velocidad angular w, respecto de un eje fijo. Sabiendo que sus radios son r1 = r y r2 = 2r, ¿cuál es la razón de sus momentos de inercia I1/I2?

P2. Dos partículas de masas: m1=m y m2=m, se mueven con MCU con la misma velocidad angular w, respecto de un eje fijo. Sabiendo que sus radios son r1 = r y r2 = 2r, ¿cuál es la razón de sus momentos de angulares L1/L2?

P3. Dada una barra uniforme de masa m y longitud L, la cual se fija en uno de sus extremos, suponiendo que se le aplica una fuerza F y se quiere la mayor rotación o torque respecto al punto de suspensión. ¿En qué lugar se debe aplicar la fuerza F?

P4. Considere una partícula de masa m, que se mueve bajo la acción de una fuerza central F, ¿cómo es su torque respecto al origen?

P5. Una partícula que se mueva de tal manera que su torque externo es cero, qué sucede con el momento angular de dicha partícula.

P6. Una partícula se mueve sobre una circunferencia en sentido antihorario. En un punto de la trayectoria, su vector aceleración centrípeta está ubicado horizontalmente hacia la izquierda (⟵) ¿Qué dirección tendrían los vectores posición y velocidad lineal de la partícula en un tiempo de un cuarto de período?

P7. ¿Suponer que el momento angular de un sistema permanece constante quiere decir que el torque neto que actúa sobre el sistema es cero? Justifique su respuesta.

P8. Una moneda atada al extremo de una cuerda con movimiento circular uniforme en sentido horario (Fig. 6.4). En cierto instante, la moneda se encuentra en la posición mostrada en la figura. Si justo en ese instante la cuerda se rompe, en qué dirección se aleja la piedra, explique su respuesta.

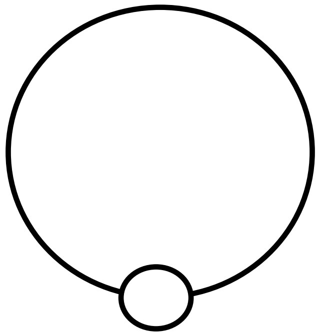


Fig. 6.4. Moneda atada en un extremo de una cuerda en movimiento circular.

P9. Considere una partícula que describe un movimiento circular uniforme, ¿es posible afirmar que la rapidez angular con que se mueve es constante? ¿Por qué?

P10. La masa de la luna es muy pequeña respecto a la de la tierra. La fuerza que mantiene a la luna en su órbita alrededor de la tierra es la fuerza de atracción gravitacional de la tierra sobre la luna ¿o la luna sobre la tierra? Justifique su respuesta.

Ejercicios Propuestos

1. Considere una polea de masa M = 2m, radio R = 10 cm y momento de inercia $I = MR^2/2$ que está sujeta por su centro como se muestra en la Fig. 6.5. Sobre la polea se enrolla una cuerda ideal en cuyo extremo cuelga una masa m. La aceleración de la masa que cuelga es:

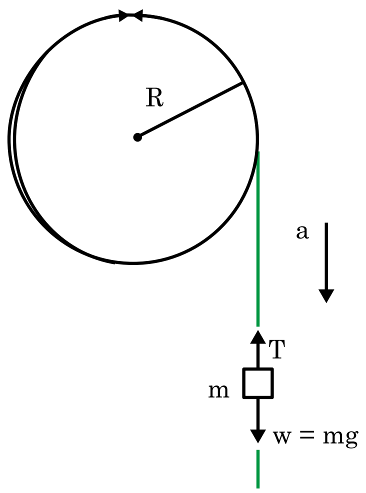


Fig. 6.5. Masa cayendo por efectos del peso mientras la polea se mueve.

a. g

b. g/2

c. 2g

d. 3g/2

2. Determine la velocidad angular (rad/s) de un disco de 2 kg de masa y radio 20 cm que rota con eje en su centro de masa con una energía cinética de 200J.

a. 50

b. 150

c. 100

d. 200

3. Un carrete circular de 5.0 kg y 20.0 cm de radio se desenrolla de una cuerda ligera sosteniendo una tensión constante en la cuerda de 100.0 N (Fig. 6.6). La aceleración angular (rad/s^2) del carrete, es:

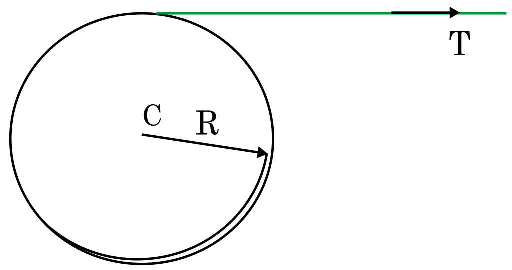


Fig. 6.6. Carrete circular desenrollando mientras es jalado por una tensión constante.

a. 50

b. 100

c. 150

d. 200

Responda las preguntas 4 a la 6, teniendo en cuenta la siguiente información. Dos discos de radios R_1 y R_2 en movimiento circular uniforme se mueven con igual rapidez angular. Siendo que $R_2 - R_1$

4. Si comparamos la magnitud de la aceleración centrípeta en el borde del disco R_1, con la del borde del disco R_2, entonces podemos decir que son:

a. iguales

b. R_1 es el doble de R_2

c. R_1 la mitad de R_2

d. R_1 es π veces mayor que R_2

5. Al comparar el periodo de rotación del disco R_1, con el periodo de rotación del disco R_2, entonces se concluye que:

a. iguales

b. R_1 es el doble de R_2

c. R_1 la mitad de R_2

d. R_1 es π veces mayor que R_2

6. Comparando las rapideces lineales en el borde del disco R_2 y R_1, podemos decir que:

a. Iguales

b. R_1 es el doble de R_2

c. R_1 la mitad de R_2

d. d) R_1 es π veces mayor que R_2

7. Suponga que usted tiene una masa atada en el extremo de una cuerda con la cual describe un movimiento circular uniforme realizando doce giros completos en un tiempo de cuatro segundos. La rapidez angular es igual a:

a. $6\pi \frac{rad}{s}$

b. $\frac{6}{\pi} \frac{rad}{s}$

c. $\pi \frac{rad}{s}$

d. $12\pi \frac{rad}{s}$

8. Un disco macizo rota en sentido horario alrededor de un eje que lo atraviesa por el centro. Dos puntos A y B se ubican en disco, de tal manera que el punto A está más cerca del centro que el punto B. Los puntos A y B tienen:

a. La misma aceleración centrípeta e igual rapidez angular.

b. Diferentes rapideces lineales y diferentes rapideces angular.

c. La misma aceleración centrípeta e igual rapidez lineal

d. La misma rapidez angular y diferentes aceleraciones centrípetas.

9. En el lanzamiento del martillo, un atleta lanza por medio de una cadena de 0.5 m de largo y una masa de 20 kg, ¿Qué cantidad de fuerza debe aplicar el atleta, si el martillo debe completar un giro en un tiempo de 1.0 s?

a. 394.8 N.

b. 390.8 N.

c. 789.5 N.

d. 225.0 N.

10. Considere una llave para soltar una tuerca muy apretada, si se quisiera soltar la tuerca de la forma más efectiva se recomienda:

a. Aplicar a la barra de la llave una fuerza perpendicular muy cerca del eje de giro, es decir donde está la tuerca.

b. Aplicar a la barra de la llave una fuerza en ángulo de 30° no muy cerca lejos del eje de giro.

c. Aplicar a la barra de la llave una fuerza en ángulo muy cerca del eje de giro.

d. Aplicar a la barra de la llave una fuerza perpendicular al extremo del eje de giro.

11. Dos niños A y B se encuentran cada uno en el extremo de un sube y baja de 6 m de longitud. El niño A tiene un peso de 200 N, mientras el niño B pesa 300 N. La distancia desde el centro de giro del sube y baja (centro de masa) a la que se debe sentar el niño B para equilibrarlo es:

a. 2.0 m.

b. 2.4 m.

c. 2.6 m.

d. 2.8 m.

12. Considere una persona que se encuentra sentada en un piso liso y sin fricción la cual es impulsada por una fuerza rotatoria y se encuentra con sus brazos extendidos sosteniendo libros pesados en cada uno de ellos, manteniendo una rapidez angula constante. Luego, recoge sus brazos y junta los libros contra su cuerpo. Como consecuencia de esta acción, ¿qué debe suceder con la inercia rotacional de la persona y la rapidez angular?

a. La inercia aumenta y la rapidez disminuye.

b. Ambos aumentan.

c. Ambos disminuyen.

d. La inercia disminuye y la rapidez aumenta.

13. Una deportista de patinaje artístico rota a razón de 1 rev/s. Su momento inercia de es de I_0. Al juntar sus brazos, su inercia rotacional disminuye a la mitad, por lo que, $I_f = I0/2$. Entonces ella rota ahora a razón de:

a. 2.5 rev/s

b. 2.0 rev/s

c. 1.0 rev/s

d. 0.5 rev/s

14. Un Antiguo edificio de los tiempos coloniales, un elevador está conectado a un contrapeso mediante un disco giratorio de 2.0 m de diámetro. El elevador sube y baja mediante los giros del disco y el disco no resbala, en los bordes del disco. Para que el elevador empiece a moverse debe acelerarse a 1.0 m/s^2. ¿Cuál debe ser la aceleración angular del disco?

a. 2.0 rev/s^2

b. 2.5 rev/s^2

c. 1.0 rev/s^2

d. 0.5 rev/s^2

15. Una esfera sólida de masa m ($I_{cm} = 2mR^2/5$) rueda sin deslizar por un plano inclinado. Suponiendo que se suelta desde una altura de 14m y que no hay fricción con el plano, la velocidad con llega el final del plano es

a. 10 m/s

b. 12 m/s

c. 14 m/s

d. 15 m/s

Conclusiones

Con la culminación de este libro se propone un texto guía para los docentes de la universidad de la costa y estudiantes de física mecánica en las diferentes áreas de la ingeniería, propendiendo ilustrar a cada uno en los temas principales de la asignatura de física mecánica con una detallada explicación de cada uno de los conceptos utilizados e ilustrados por medio de ejemplos, preguntas de reflexión y ejercicios de aplicaciones para reforzar los conocimientos y habilidades que el estudiante debe adquirir para afrontar el curso de una manera exitosa y satisfactoria.

Recomendaciones

El libro de física mecánica para estudiantes de ingeniería se considera un texto guía para la utilización de los docentes y estudiantes de la universidad de la costa. Su utilización dentro y fuera de las aulas de clase lo hacen una herramienta de aprendizaje por parte del estudiante, lo cual permite el desarrollo de algunas competencias genéricas como el razonamiento cuantitativo.

Se espera que cada estudiante dedique el tiempo suficiente al escrutinio del texto de tal manera que este brinde las herramientas para poder afrontar las evaluaciones de manera exitosa, ampliando los conocimientos a través de las preguntas conceptuales y ejercicios, así como el desarrollo de temas específicos de interés por parte de los estudiantes de ingeniería de la universidad de la costa.

Respuesta a los Ejercicios Propuestos

Capítulo 1

1. A
2. D
3. B
4. A
5. B
6. A
7. D
8. B
9. C
10. Graficar
11. Graficar
12. A
13. D
14. C
15. B

Capítulo 2

1. B
2. A
3. A
4. A
5. D
6. A
7. B
8. B
9. D
10. D
11. C
12. A
13. C
14. D
15. C

Capítulo 3

1. A
2. C
3. C
4. D
5. B
6. D
7. A
8. C
9. B
10. A
11. B
12. D
13. A
14. C
15. D

Capítulo 4

1. B
2. B
3. C
4. B
5. A
6. D
7. C
8. C
9. C
10. B
11. B
12. C
13. B
14. C
15. D

Capítulo 5

16. C
17. A
18. D
19. B
20. C
21. C
22. A
23. B
24. D
25. D
26. C
27. A
28. D
29. A
30. B

Capítulo 6

1. B
2. C
3. D
4. C
5. A
6. B
7. A
8. D
9. A
10. D
11. A
12. D
13. B
14. C
15. C

Referencias

[1] S. Zemansky & Y. Freedman, *Física Universitaria con Física Moderna*, vol. 1, 13° ed., México, D.F., México: Pearson Educación, 2013.

[2] R. A. Serway & J. W. Jewett, Jr, *Física para Ciencias e Ingenierías*, vol. 1, 7° edición, México, D.F., México: Cengage Learning, 2008.

[3] Paul G. Hewitt, *Física Conceptual*, 10° ed., México, D.F., México: Pearson Pretince Hall, 2007.

[4] M. Alonso & E. Finn, *Física Mecánica*, vol. 1, 1° ed., Barcelona, España: Fondo educativo Iberoamericano, 1970.

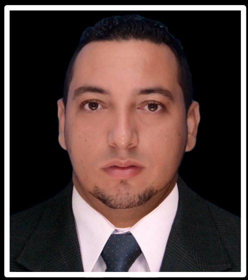
[5] H. Resnick, *Fundamentos de Física*, vol. 1, Mecánica, 9° ed., México, D.F., México: LTC, 2004.

[6] W. Bauer & G. Westfall, *Física para Ingeniería y Ciencia*, vol. 1, 2° ed., Lima, Peru: McGraw-Hill Education, 2014.

[7] R. A. Serway & C. Vuille, *Fundamentos de Física*, 10° ed., México, D.F., México: Cengage, 2018.

David Vera Mellao

Físico de la universidad del Atlántico y Magister en Física Aplicada de la Universidad del Norte (Colombia). Docente e investigador de la Universidad de la Costa (Colombia) en la línea de síntesis y caracterización de materiales. Autor de varias publicaciones en propiedades ópticas en materiales semiconductores, y Neurociencia computacional.



Crisitan Solano

Físico y Magister en Física Aplicada. Docente catedrático e investigador en la Corporación Universitaria Americana (Colombia) en la línea de Síntesis y caracterización de materiales. Autor de varias publicaciones en síntesis y análisis de propiedades físicas de compuestos inter metálicos y películas delgadas semiconductoras.

Pablo Viloria Molinares

Licenciado en educación con especialidad en Matemática y Física. Especialista en Ciencias Física y Magister en Ciencias Física con especialidad en Cosmología. Su línea de trabajo son los lentes gravitacionales, en la cual tiene la mayoría de sus publicaciones. Comenzó su actividad académica en la Universidad de la Costa (colombia) y a lo largo de su carrera docente ha sido un activo promotor de la educación en ciencias. Ha trabajado y publicado sobre el desarrollo de instrumentación electrónica para la medición de variables físicas en los laboratorios de física básica, integridad estructural de tuberías de transporte de hidrocarburos, análisis termodinámico de agujeros negros y la formulación de la electrodinámica a partir del primer postulado de la relatividad especial. Ha impartido conferencias en los encuentros y congresos de física, y ha sido invitado en varias ocasiones para dictar charlas en el planetario de Combarranquilla. Además de su trabajo en este libro, es coautor del libro "Principios de Instrumentación Electrónica" realizado con otros docentes de la Universidad de la Costa.